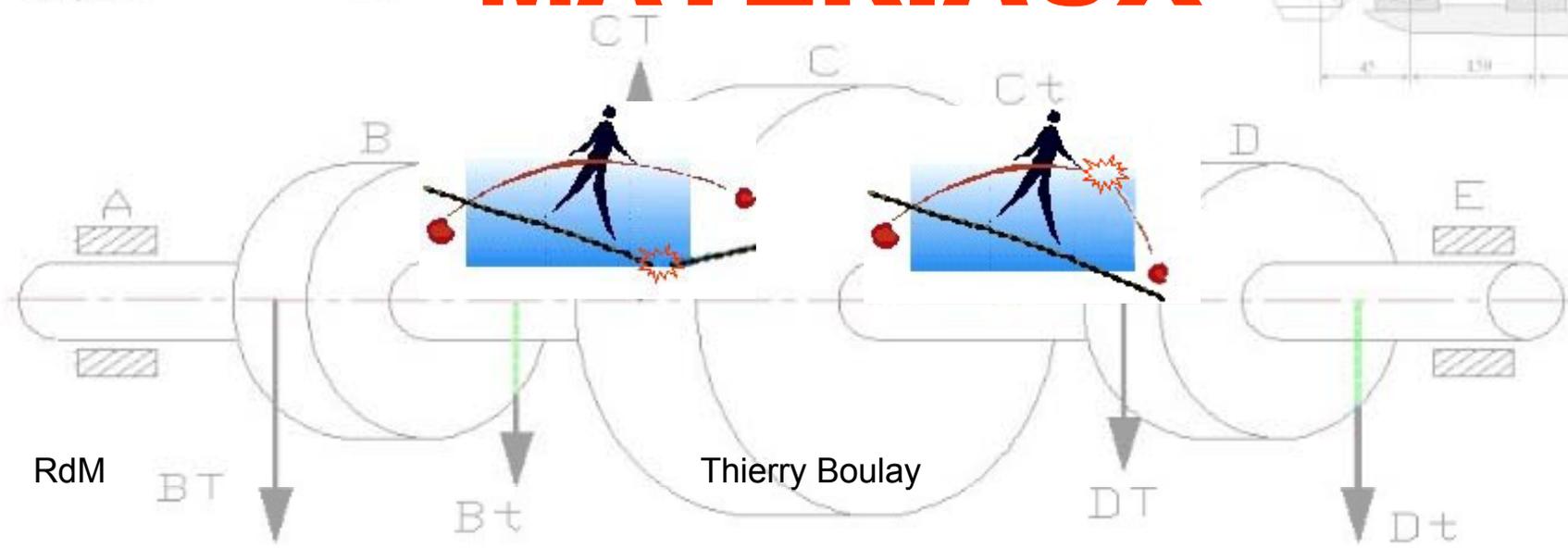
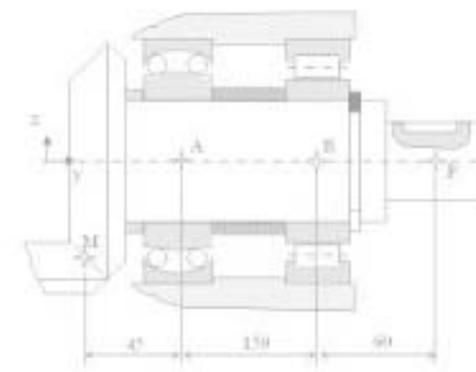
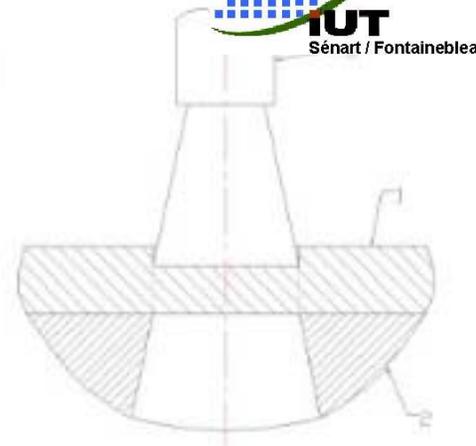


# RESISTANCE DES MATERIAUX



Thierry Boulay

# Compétences validées

## Savoir -faire

Calcul des contraintes et déformations des poutres dans le cas de sollicitations simples  
Dimensionnement d'un arbre ou d'une pièce mécanique dans le cas de sollicitations simples  
Mesures de déformations puis déduction des contraintes

### Contenu pédagogique proposé

Hypothèses générales, définitions : poutres, efforts dans une section, définition des différentes sollicitations, contraintes, des moments quadratiques  
Caractéristiques mécaniques des matériaux (essais)  
Études des sollicitations simples : traction, compression, cisaillement, torsions des profils circulaires, flexion plane  
Relations contrainte - déformation  
Notion de flambage  
Notion de concentration de contraintes  
Théorème de superposition  
Notions de sollicitations composées, flexion déviée, flexion traction ou compression  
Méthodes expérimentales de détermination des déformations et des contraintes : extensométrie

Programme Pédagogique National du 26 mai 2005 : UE3 module MECA b

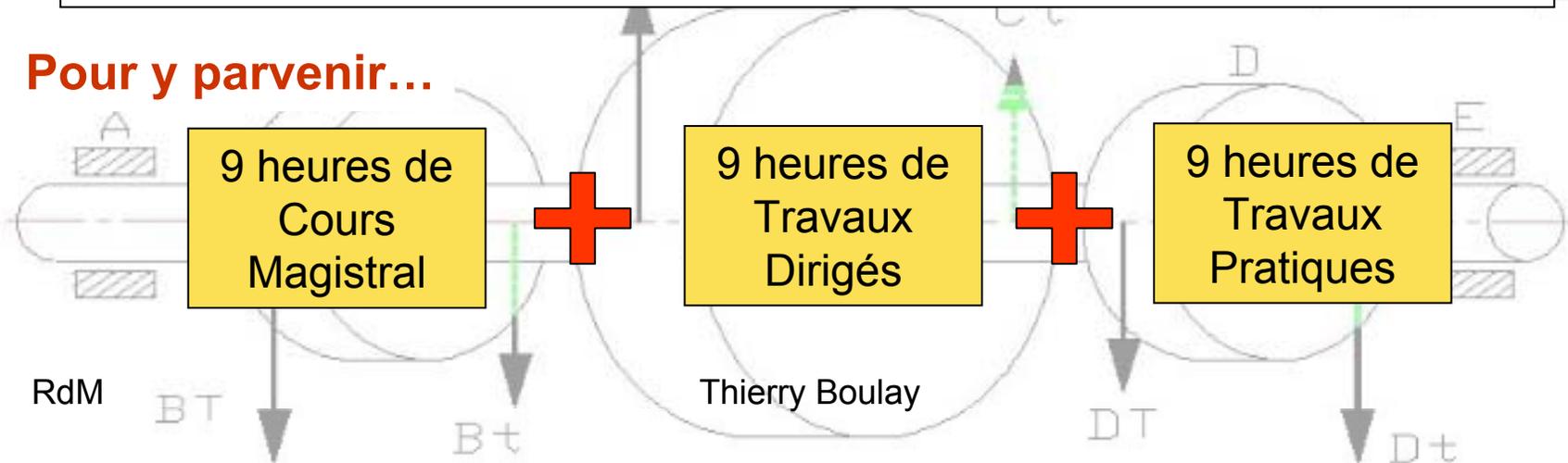
# Mes objectifs réels

Permettre aux étudiants d'appréhender à partir d'un système mécanique réel, les sollicitations qu'il subit et auxquelles il doit résister tant dans le domaine des contraintes que celui des déformations.

Prendre en compte les notions de température, de flambage, de mixités des chargements. S'assurer que les matériaux choisis et que les dimensions données sont conformes et permettent de lui redonner la fonctionnalité pour lequel il avait été prévu.

Permettre aux étudiants d'appréhender un système mécanique pour en modifier le cahier des charges et lui donner une fonctionnalité supplémentaire en respectant les contraintes qu'il subit.

## Pour y parvenir...



## Modélisation

- 1A Solide indéformable / déformable (7)
- 1B Systèmes équivalents (8)
- 1C Modélisation (9)
- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre (11)
- 1E Hypothèses de travail (18)

## Forces de cohésion

- 2A Expérience préliminaire (21)
- 2B Forces intérieures (22)
- 2C Notion de contrainte (23)
- 2D Conditions d'équilibre (24)

## Caractérisation des matériaux

- 3A Caractéristiques mécaniques
- 3B Essai de traction
- 3C Autres essais

## Sollicitations simples

- 4A Décomposition (26)
- 4B Préliminaire (29)
- 4C Traction (30)
- 4D Compression (31)
- 4E Cisaillement (35)
- 4F Torsion (41)
- 4G Flexion (48)

Voir Module TCMa

RdM

BT

Bt

Thierry Boulay

DT

Dt

# Sommaire

Principe de superposition

- [5A Principe](#) (63)
- [5B Exemple](#) (64)

Notions de sollicitations composées

- [6A Flexion + Torsion](#) (65)
- [6B Traction + Torsion](#) (66)
- [6C Torsion + Cisaillement](#) (67)
- [6D Flexion + Traction](#) (68)

Notions de flambage

- [7A Théorie d'Euler](#) (69)
- [7B Détermination de  \$F\_c\$](#)  (70)
- [7C Détermination de l'élancement](#) (71)
- [7D Condition de résistance au flambage](#) (72)

[Bibliographie](#) (73)

[Conclusion](#) (74)

RdM

BT

Bt

Thierry Boulay

DT

Dt

# Préliminaire

L'étude de Résistance des matériaux a pour but de répondre à des exigences différentes :

## Résistance

La pièce doit supporter et transmettre les charges

## Rigidité ou souplesse

La pièce ne doit pas subir de déformations excessives par rapport à son utilisation

## Stabilité

La pièce doit conserver son « intégrité »

## Endurance

La pièce doit tolérer un effort répété

## Résilience

La pièce doit pouvoir accepter un effort dynamique et donc absorber une quantité d'énergie sans être détériorée.



# Modélisation

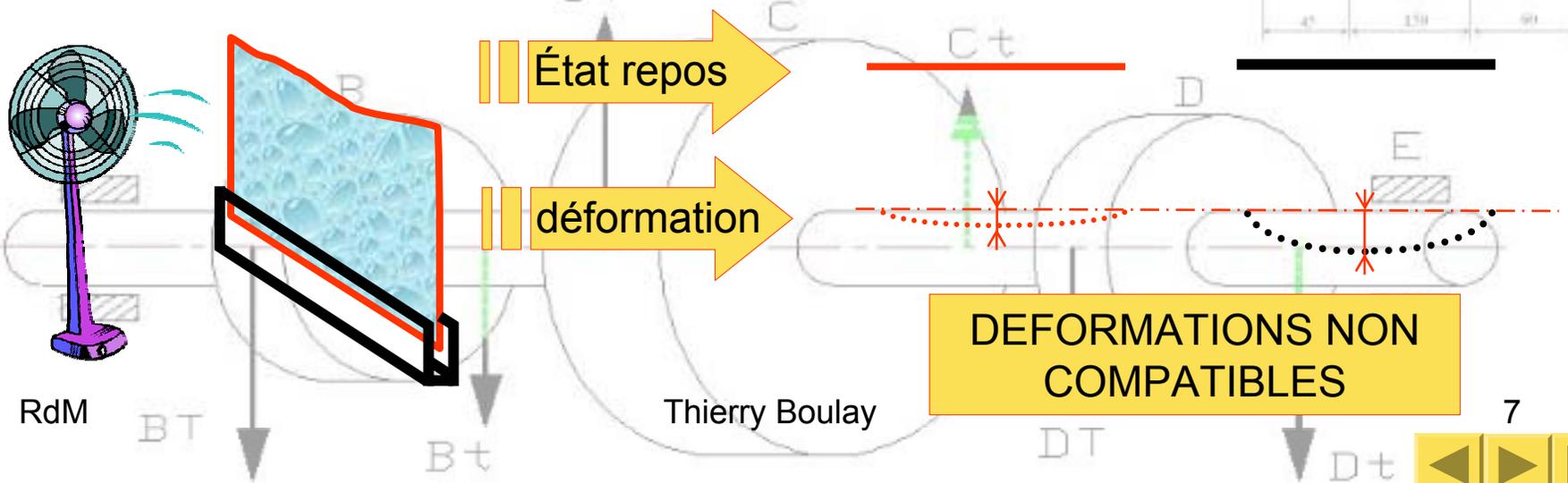
- 1A Solide indéformable / déformable

## Solide indéformable

En statique on a considéré que les déformations étaient négligeables devant les dimensions du système et surtout qu'elles ne perturbaient pas les déterminations des efforts.

## Solide déformable

Cette hypothèse n'est pas de mise en Résistance des Matériaux puisqu'il s'agit au contraire de **déterminer les déformations** et savoir si elles sont **acceptables**, non pas au sens des grandeurs mais au sens des contraintes technologiques qu'elles entraînent.



# Modélisation

- 1B Systèmes équivalents

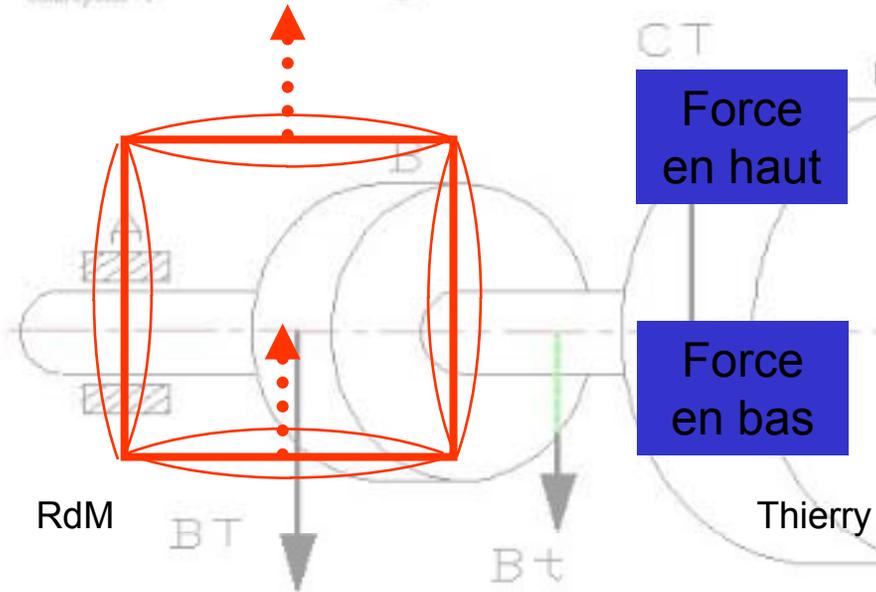
## Remarque

En statique on a vu qu'un solide soumis à  $n$  forces pouvait être représenté par un solide soumis à une force résultante.

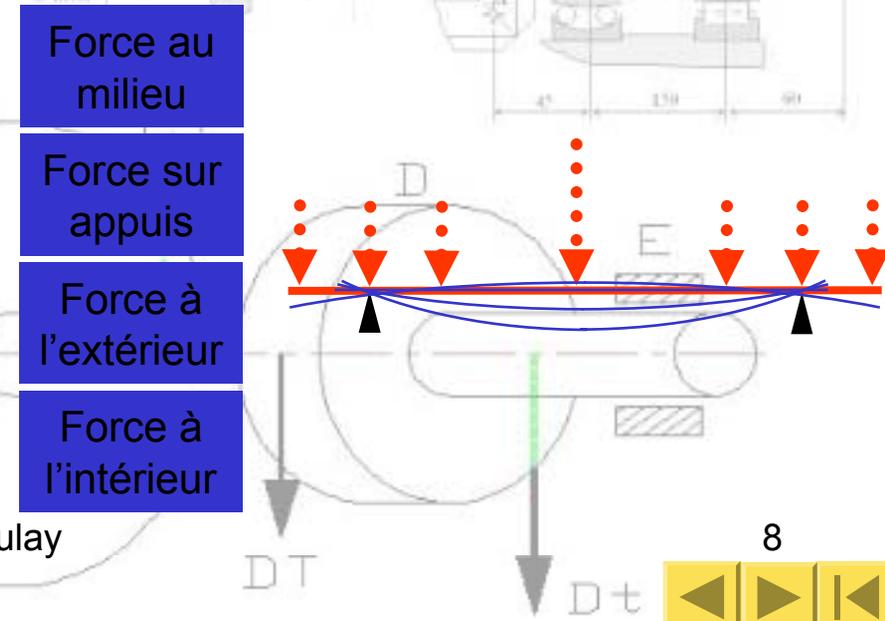
En Résistance des Matériaux **il ne faut pas** réduire les actions mécaniques appliquées en des points différents à un **torseur équivalent** en un autre point.

## Exemples

Changement du point d'application de l'A.M.



Changement par des forces équivalents



Force en haut

Force en bas

Force au milieu

Force sur appuis

Force à l'extérieur

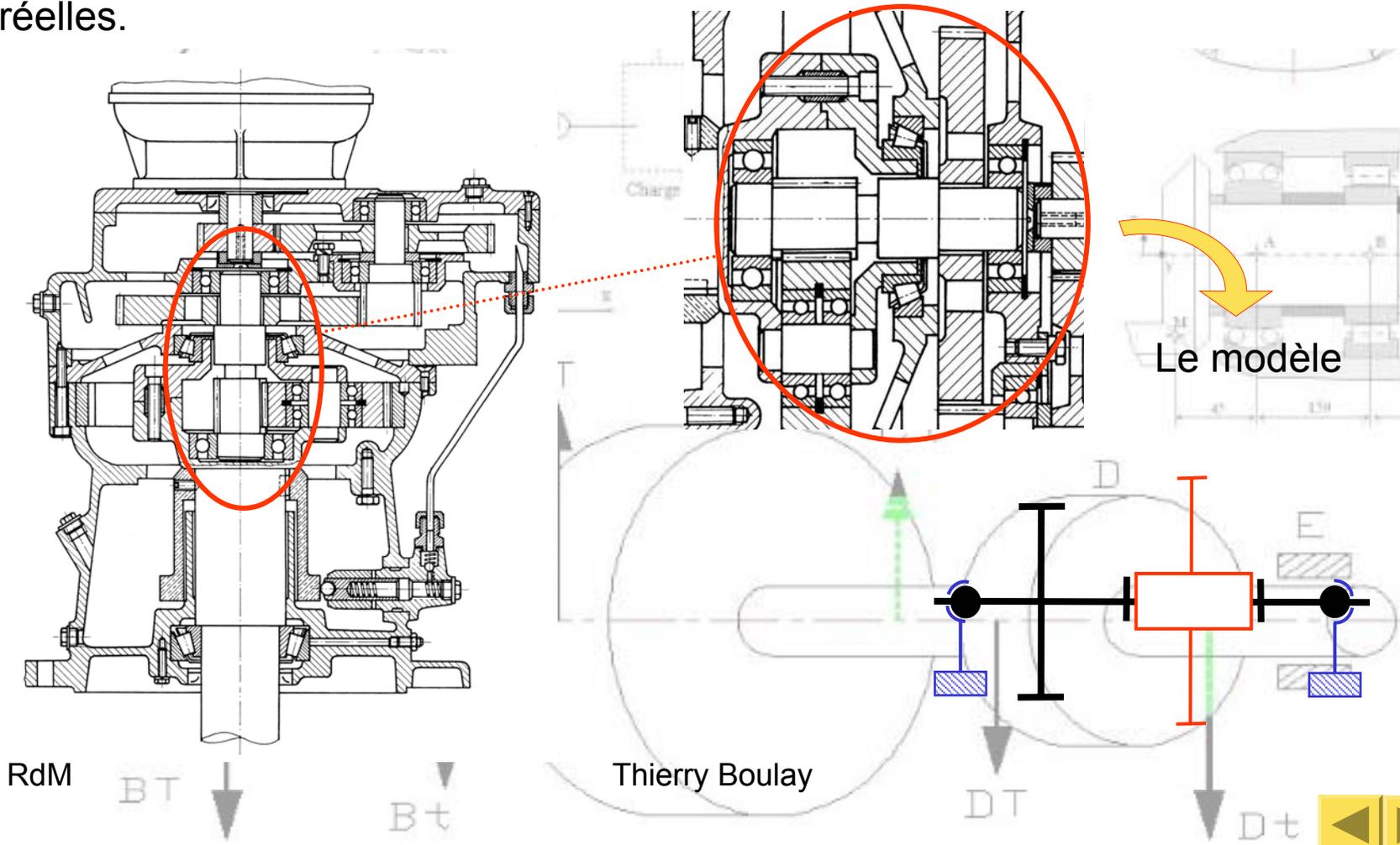
Force à l'intérieur

Thierry Boulay

# Modélisation

- 1C Modélisation

Le choix de la modélisation peut avoir des conséquences sur la nature des A.M. et donc sur les contraintes et déformations trouvées par rapport aux valeurs réelles.



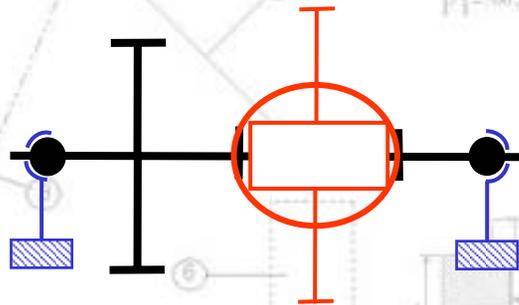
Thierry Boulay



# Modélisation

- 1C Modélisation suite

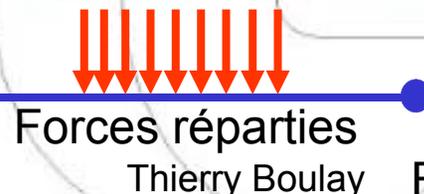
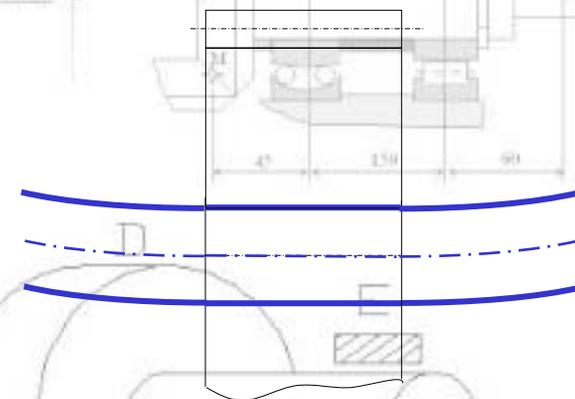
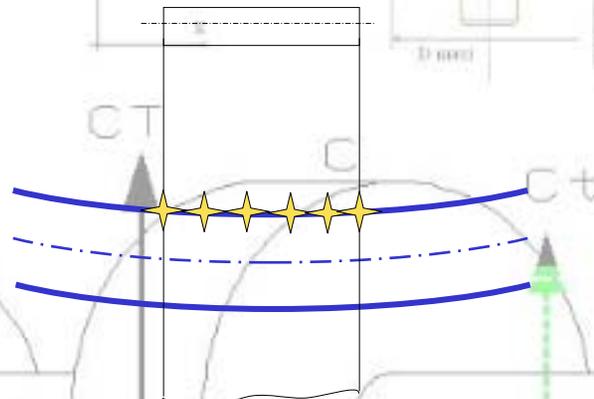
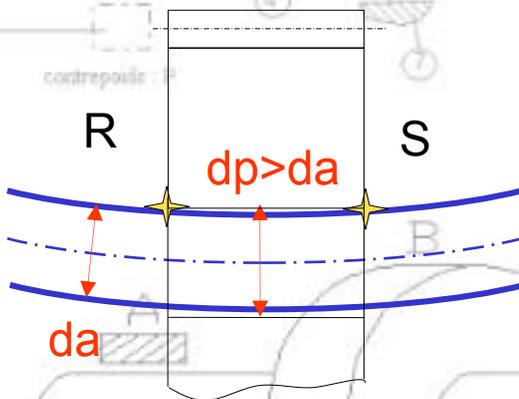
Étude de la liaison glissière



Pignon rigide monté avec jeu sur l'arbre

Pignon déformable monté sans jeu sur l'arbre

Pignon rigide monté sans jeu sur l'arbre



# Modélisation

- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

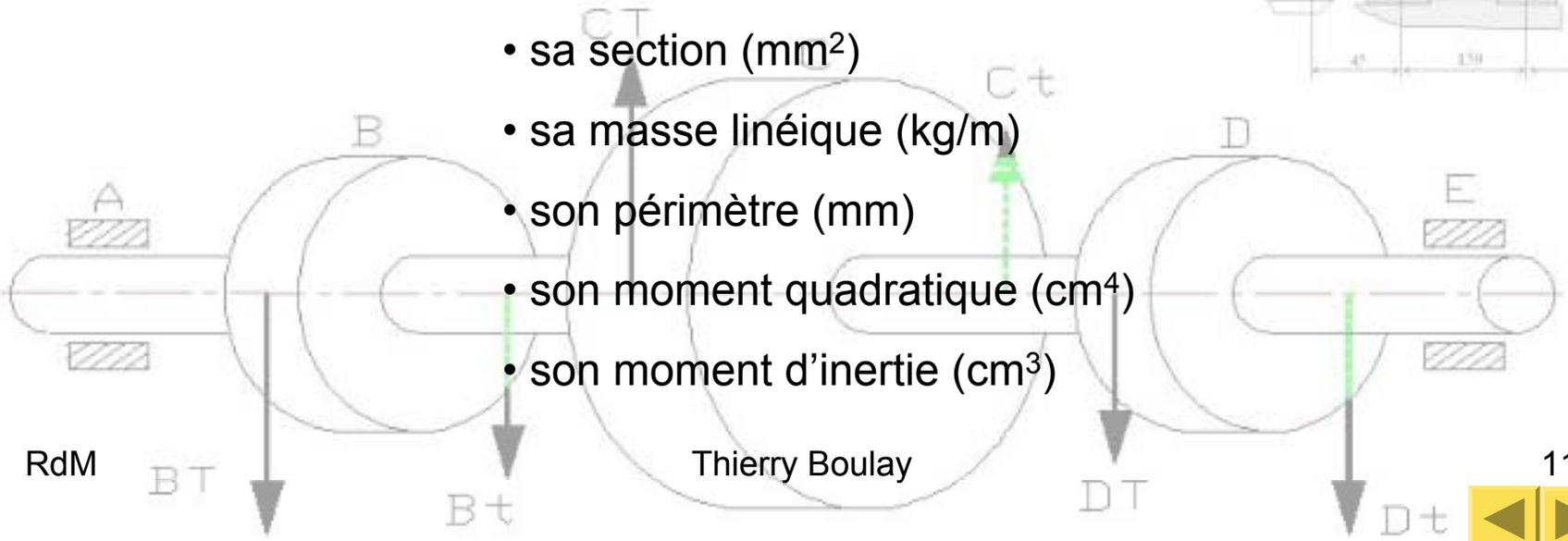
## Qu'est ce qu'une poutre ?

Une poutre est un solide engendré par le déplacement d'une surface plane. Le **lieu des Centres de Gravité** de chacune des surfaces planes est appelé la **ligne moyenne**, elle peut être rectiligne ou courbe.

Deux surfaces voisines peuvent ne pas être identiques mais la **variation doit rester faible**.

Il existe un certain nombre de caractéristiques géométriques permettant de définir une poutre :

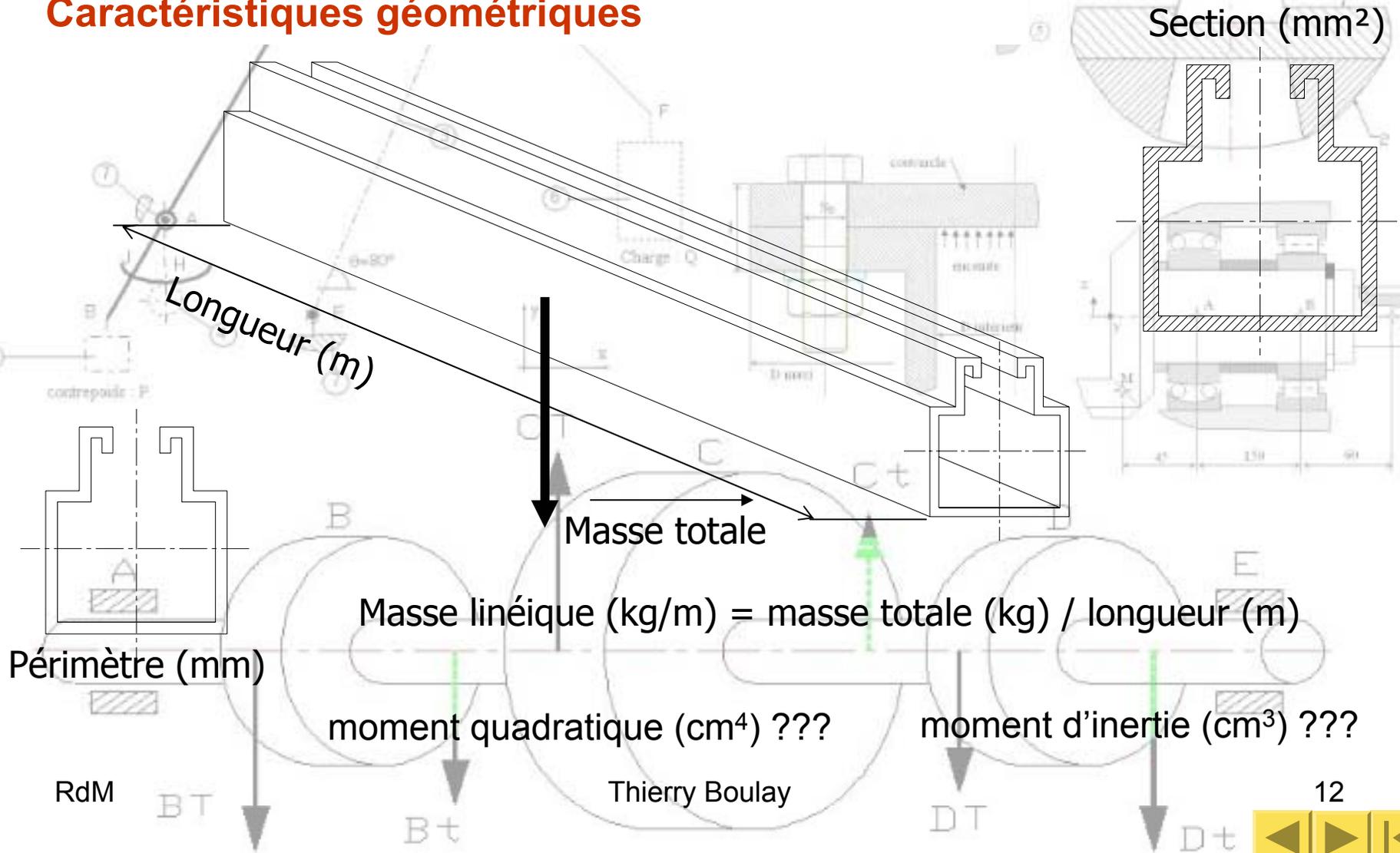
- sa longueur (cm)
- sa section ( $\text{mm}^2$ )
- sa masse linéique (kg/m)
- son périmètre (mm)
- son moment quadratique ( $\text{cm}^4$ )
- son moment d'inertie ( $\text{cm}^3$ )



# Modélisation

- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

## Caractéristiques géométriques

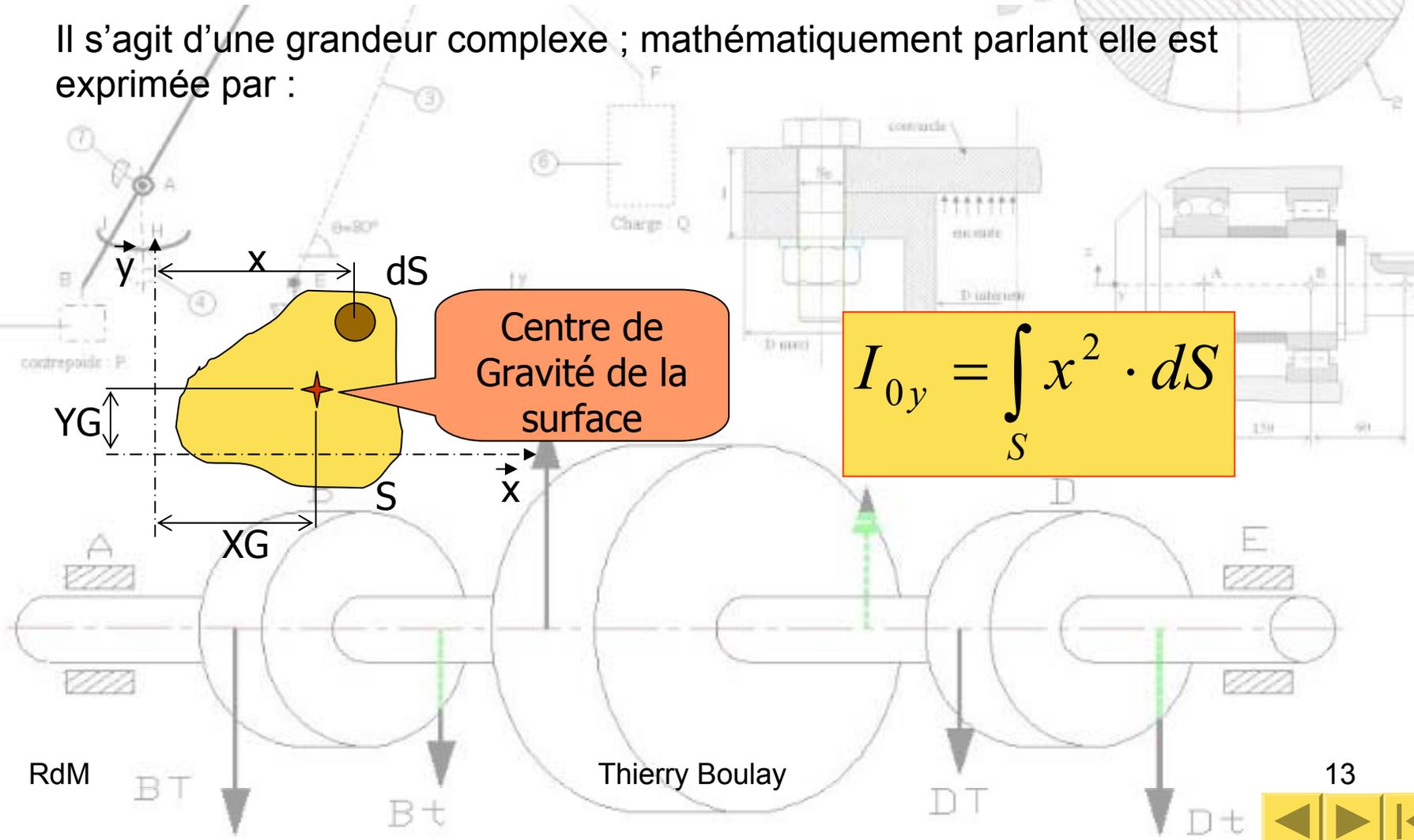


# Modélisation

- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

## Moment quadratique

Il s'agit d'une grandeur complexe ; mathématiquement parlant elle est exprimée par :



# Modélisation

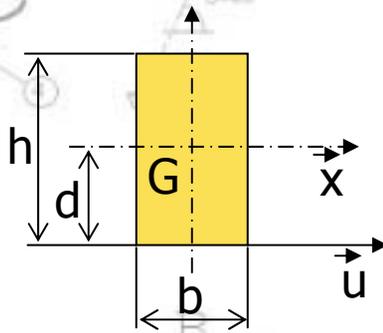
- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

## Moment quadratique

Pour une surface simple de ce type on peut le déterminer en utilisant :

Des formules simples

Le Théorème de Huyghens



$$I_{Gx} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_u = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_u = I_{Gx} + S \cdot d^2$$

Surface

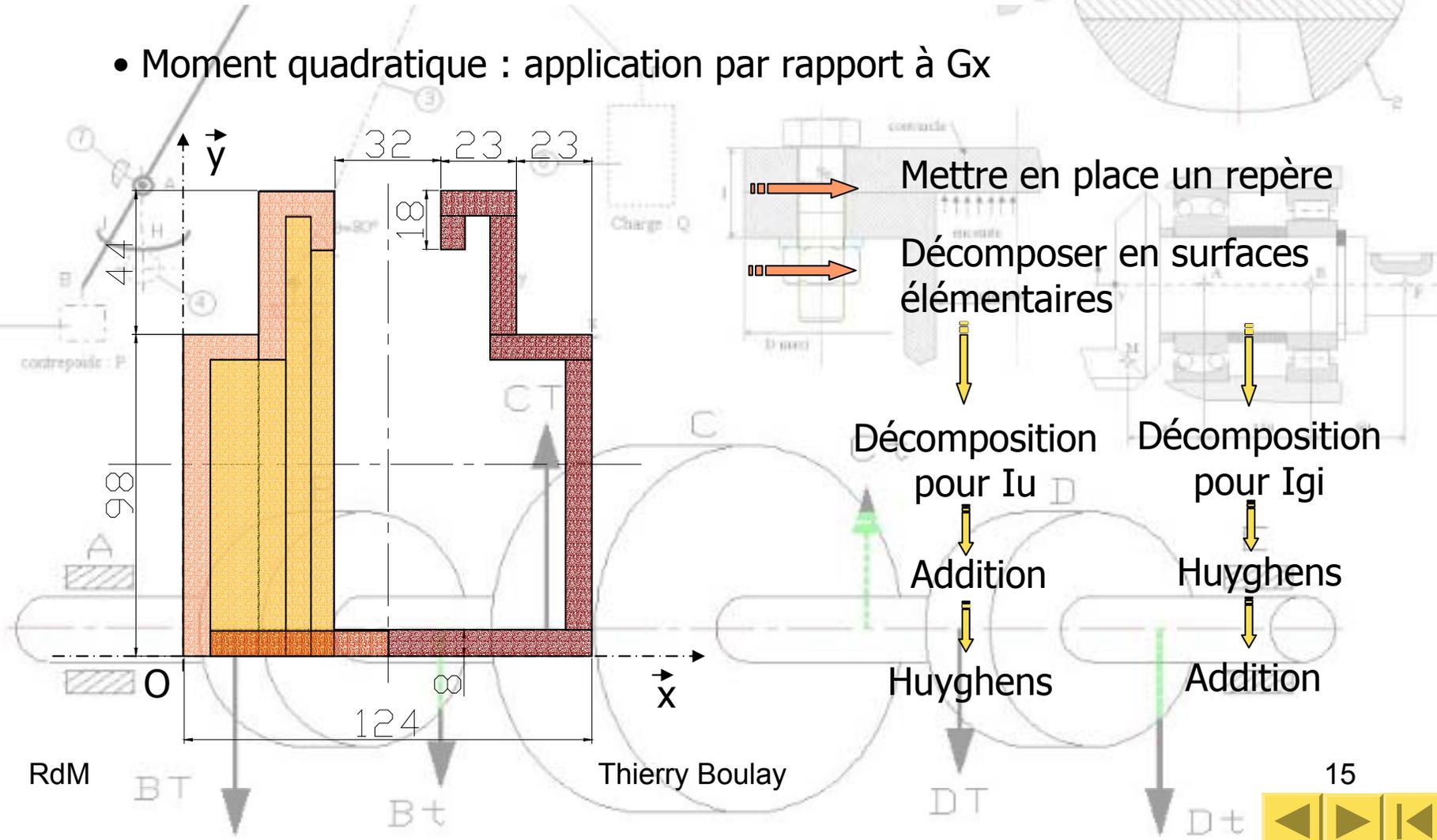
Distance entre les deux axes

# Modélisation

- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

## Moment quadratique

- Moment quadratique : application par rapport à  $G_x$

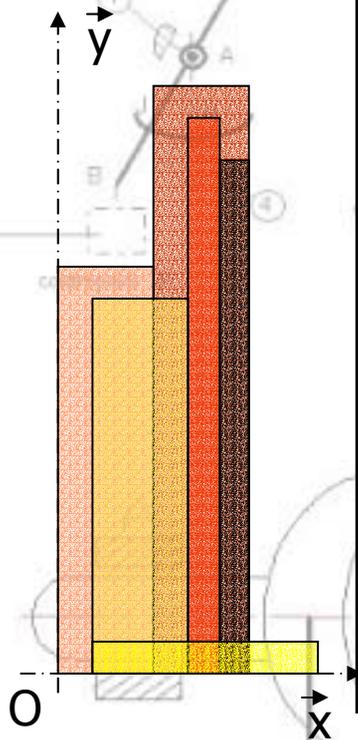


# Modélisation

- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

## Moment quadratique

- Moment quadratique : application par rapport à  $G_x$



i	$b_i$	$h_i$	$x_i$	$y_i$	$S_i$	$x_i S_i$	$y_i S_i$	$I_{Ox}$
1	23	98	11.5	49	2254	25921	110446	722
2	23	142	34.5	71	3266	112677	231886	2195
3	23	90	19.5	45	-2070	-40365	-93150	-559
4	7	134	34.5	67	-938	-32361	-62846	-561
5	8	124	42	62	-992	-41664	-61504	-508
6	54	8	35	4	432	15120	1728	1
					1952	39328	126560	1289

RdM

Thierry Boulay

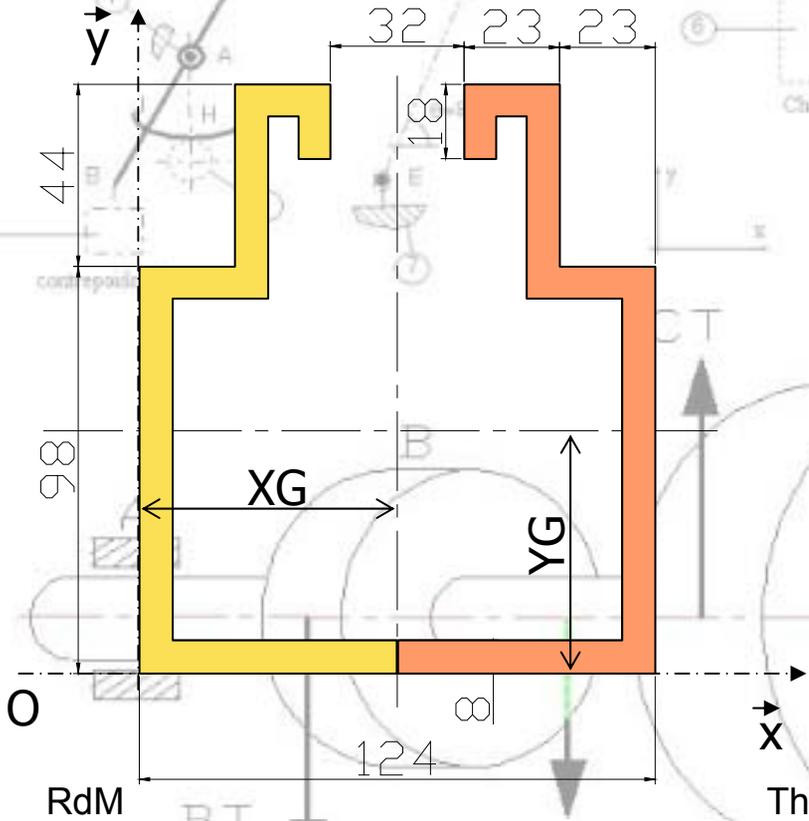


# Modélisation

- 1D Caractérisation géométrique d'une poutre

## Moment quadratique

- Moment quadratique : application par rapport à Gx



Détermination du Centre de Gravité

$$XG = 124/2 = 62 \text{ mm}$$

$$YG = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i} = \frac{126560}{1952} = 64.83 \text{ mm}$$

Détermination du Moment quadratique suivant GX :

$$I_u = I_{u1} + I_{u2} = 2578 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned}
 I_{GX} &= I_u - \sum S_i \times YG^2 \\
 &= 2578 - 2 \times 19.52 \times 6.48^2 \\
 &= 938.7 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$



# Modélisation

- 1E Hypothèses de travail

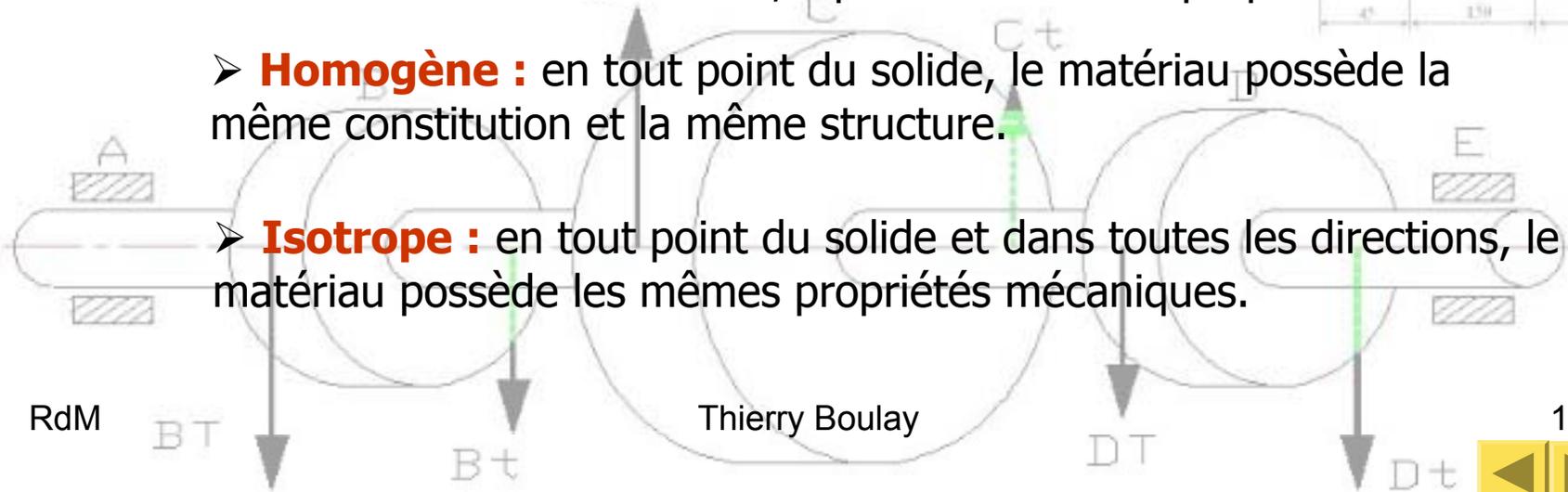
## Rappel

Un matériau est constitué d'atomes répartis suivant un réseau cristallin. Les **forces interatomiques** maintiennent les atomes aux nœuds du réseau. Ces phénomènes provoquent la **cohésion des particules de matière** et permettent au solide de **résister aux effets des efforts extérieurs**. Chaque particule est soumise aux forces de cohésions  $f_i$ .

## Hypothèses

Le matériau est un **milieu continu**, il possède donc les propriétés suivantes :

- **Homogène** : en tout point du solide, le matériau possède la même constitution et la même structure.
- **Isotrope** : en tout point du solide et dans toutes les directions, le matériau possède les mêmes propriétés mécaniques.

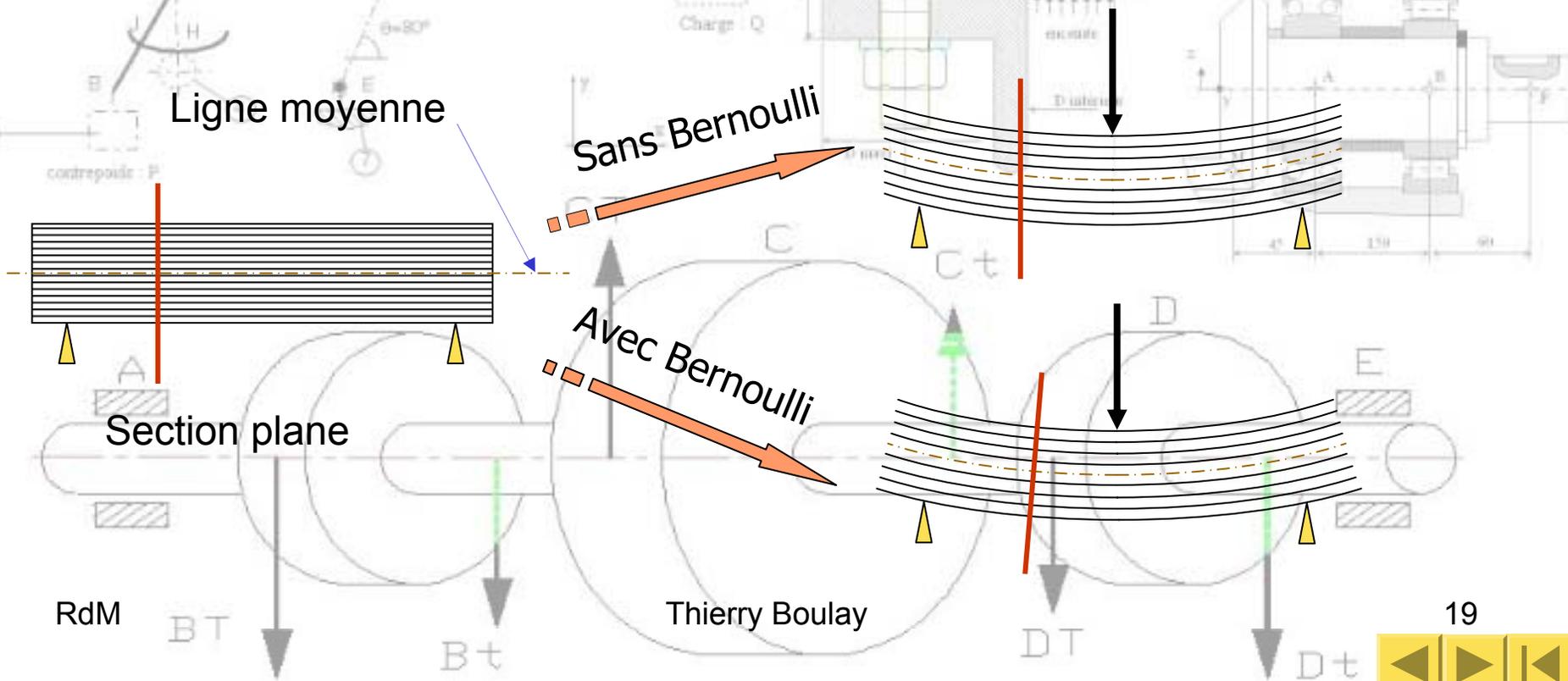


# Modélisation

- 1E Hypothèses de travail

## Hypothèse sur la déformation

**Loi de Bernoulli** : Toute section plane et perpendiculaire à la ligne moyenne avant déformation, reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après l'application des charges extérieures.

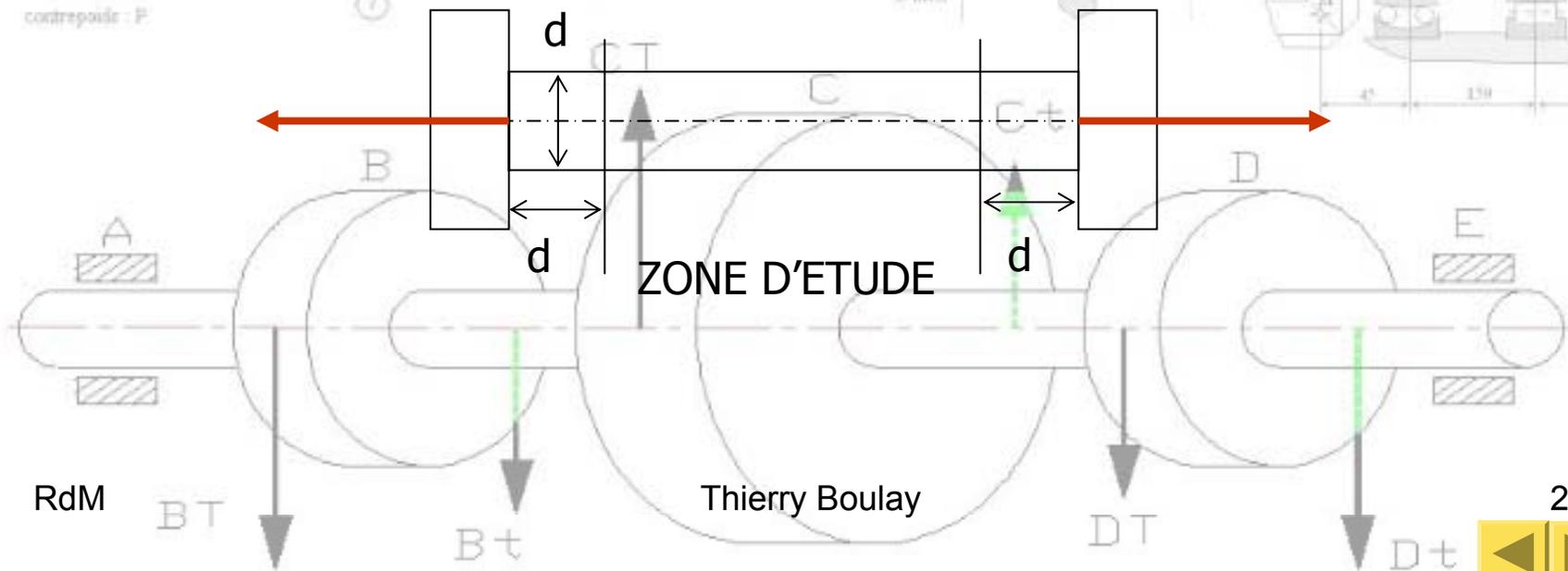


# Modélisation

- 1E Hypothèses de travail

## Hypothèse sur l'application des charges

**Barré de Saint Venant** : Pour exercer les efforts extérieurs, on utilise des moyens différents (épaulements, goupilles, anneaux élastiques, filetages,...), ceux-ci n'ont aucun effet sur la répartition des forces de cohésions dès que l'on se situe à plus d'une fois la plus grande dimension transversale.

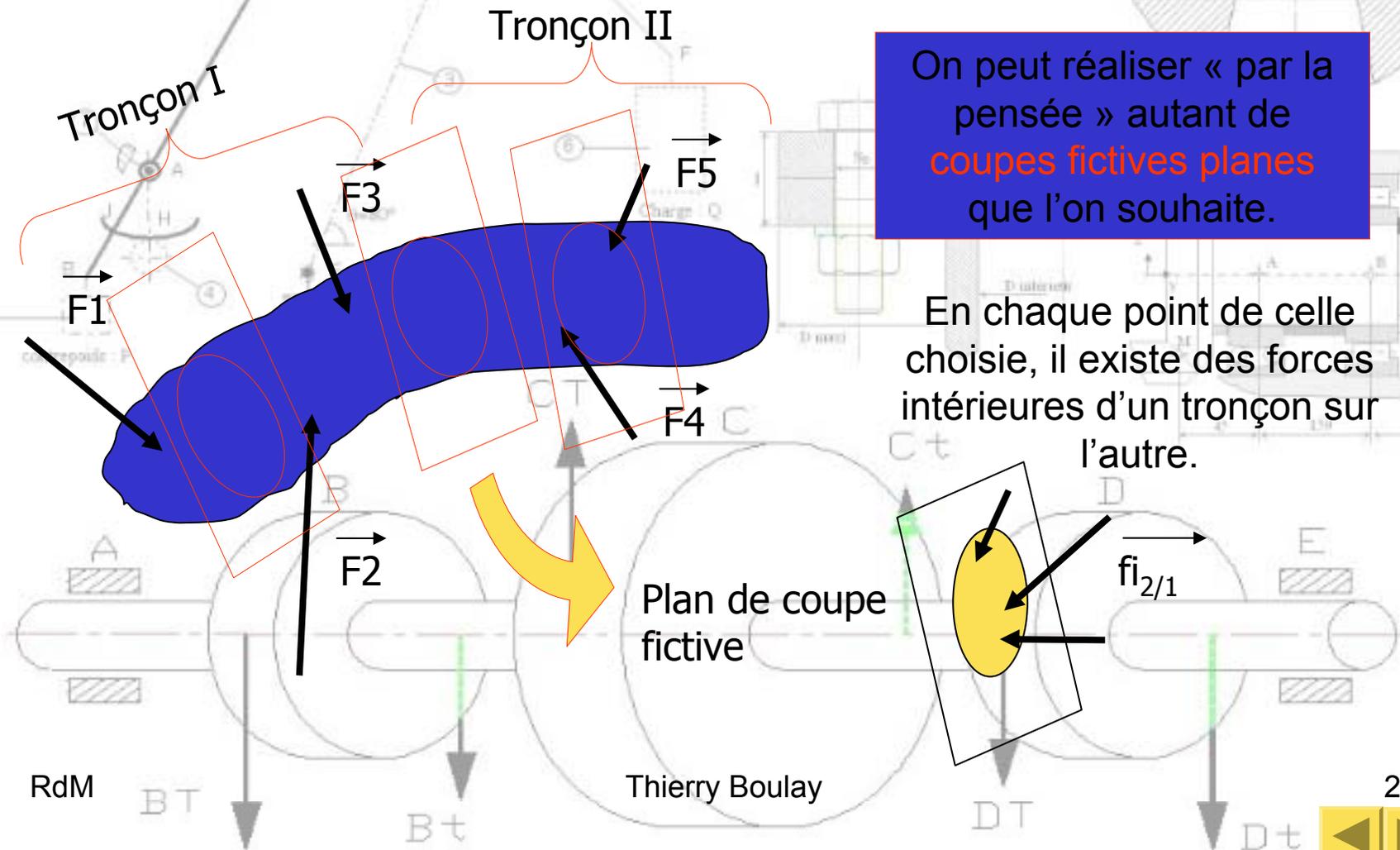




# Forces de cohésion

- 2B Forces intérieures

Soit un solide en équilibre et soumis à  $n$  AME :



On peut réaliser « par la pensée » autant de **coupes fictives planes** que l'on souhaite.

En chaque point de celle choisie, il existe des forces intérieures d'un tronçon sur l'autre.



# Forces de cohésion

- 2C Notions de contrainte

Elle permet de **confronter des résultats** en parlant un langage unique

Elle est définie par la CONTRAINTE = **FORCE / SURFACE**

L'unité est donc le Pascal (Pa) ; 1 MPa = 1 N/mm<sup>2</sup> ; 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>

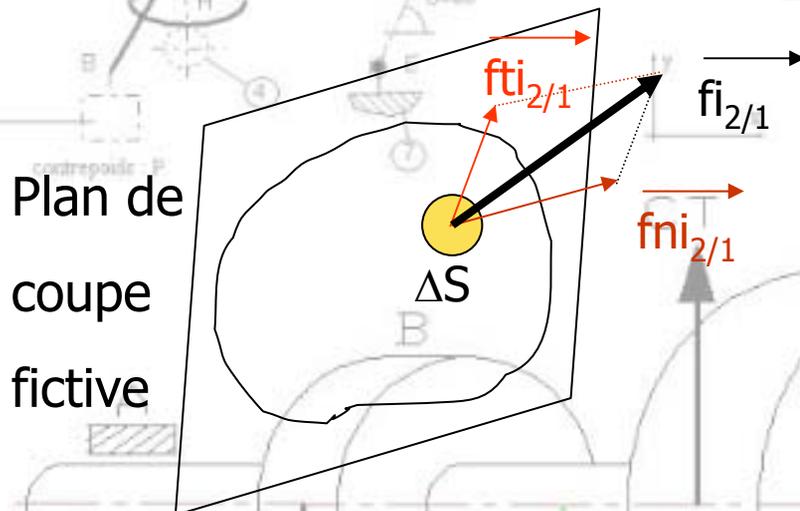
Il en existe 2 sortes :

- La contrainte normale  $\sigma$  (SIGMA)

$$\sigma = \frac{fni}{\Delta S}$$

- La contrainte tangentielle  $\tau$  (TAUX)

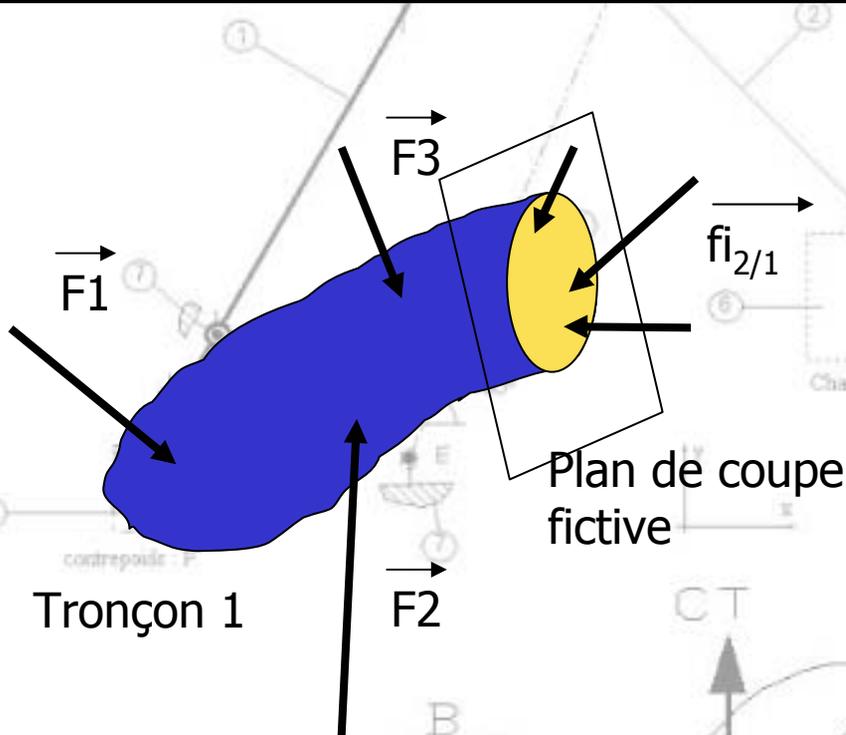
$$\tau = \frac{fti}{\Delta S}$$



Plan de  
coupe  
fictive

# Forces de cohésion

- 2D Conditions d'équilibre



Pour que 1 soit à l'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext_{/1}} + \sum \vec{f}_{int_{2/1}} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{/point}(\vec{F}_{ext_{/1}}) + \sum \vec{M}_{/point}(\vec{f}_{int_{2/1}}) = \vec{0}$$

# Forces de cohésion

- 2D Conditions d'équilibre

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}_{/1}} + \sum \overrightarrow{f_{int}_{2/1}} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{M}_{/point}(\overrightarrow{F_{ext}_{/1}}) + \sum \overrightarrow{M}_{/point}(\overrightarrow{f_{int}_{2/1}}) = \vec{0}$$

Pour que la poutre résiste il faut donc que les forces intérieures soient inférieures aux forces de cohésion de la matière.....par extension on aura donc :

$$\sum \{T_{S/1}\} = \{0\} = \sum \{T_{ext_{S/1}}\} + \{T_{int_{2/1}}\} \quad \{T_{int_{2/1}}\} \leq \{T_{coh_{2/1}}\}$$

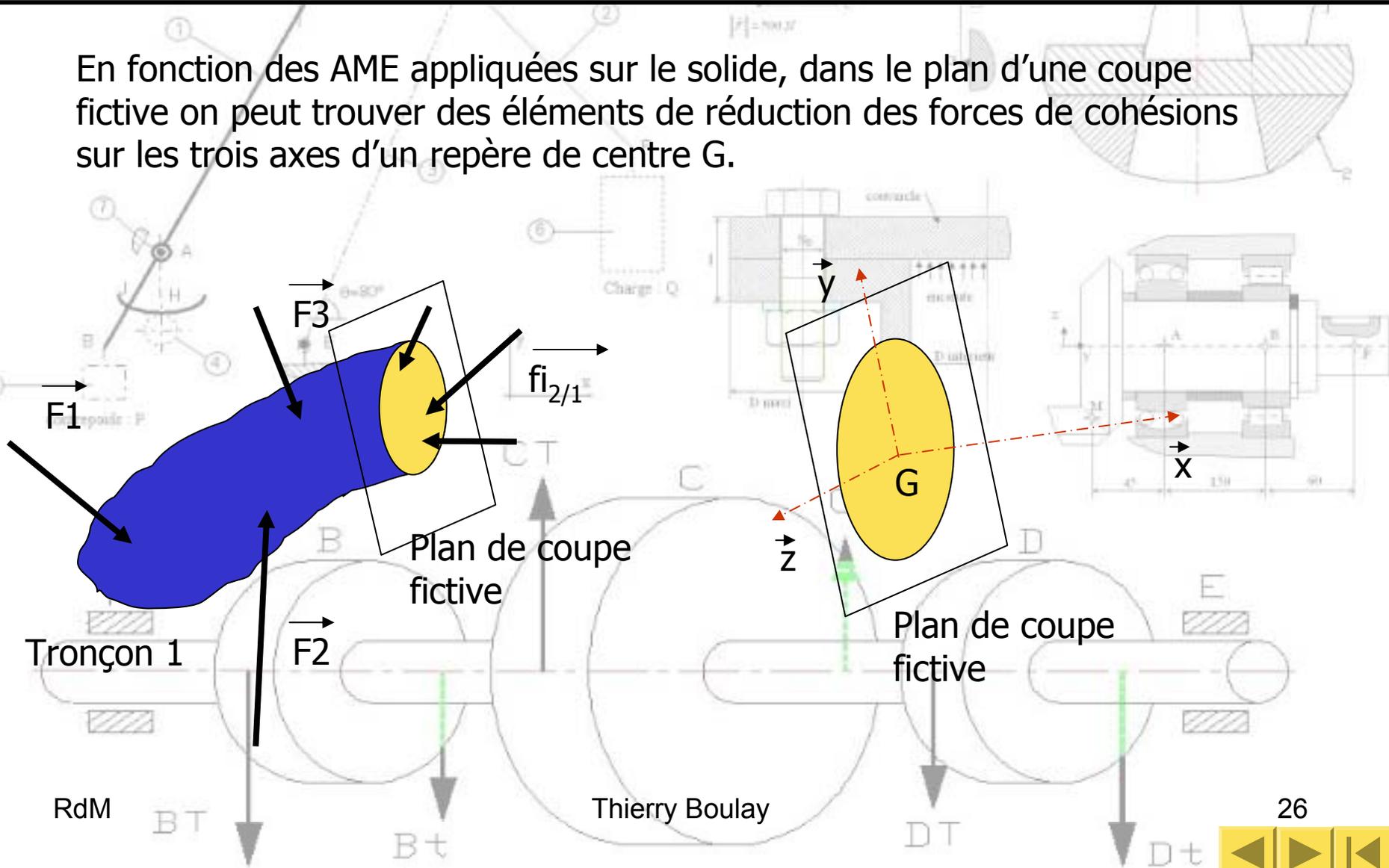
$$\{T_{coh_{2/1}}\} = - \sum \{T_{ext_{S/1}}\}$$

Que l'on appliquera au point G centre de la coupe fictive

# Sollicitations simples

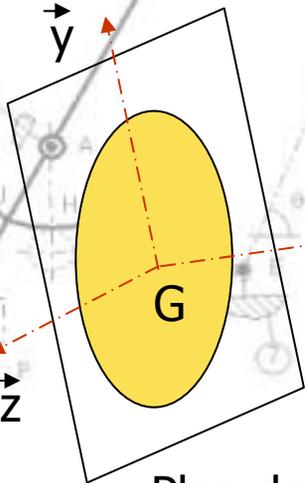
- 4A Décomposition

En fonction des AME appliquées sur le solide, dans le plan d'une coupe fictive on peut trouver des éléments de réduction des forces de cohésions sur les trois axes d'un repère de centre G.



# Sollicitations simples

- 4A Décomposition



Plan de coupe fictive

La projection des forces de cohésions

→ sur l'axe x est appelée **EFFORT NORMAL** et noté :  $\vec{N}$

→ sur l'axe y est appelée **EFFORT TRANCHANT** et noté :  $\vec{T}_y$

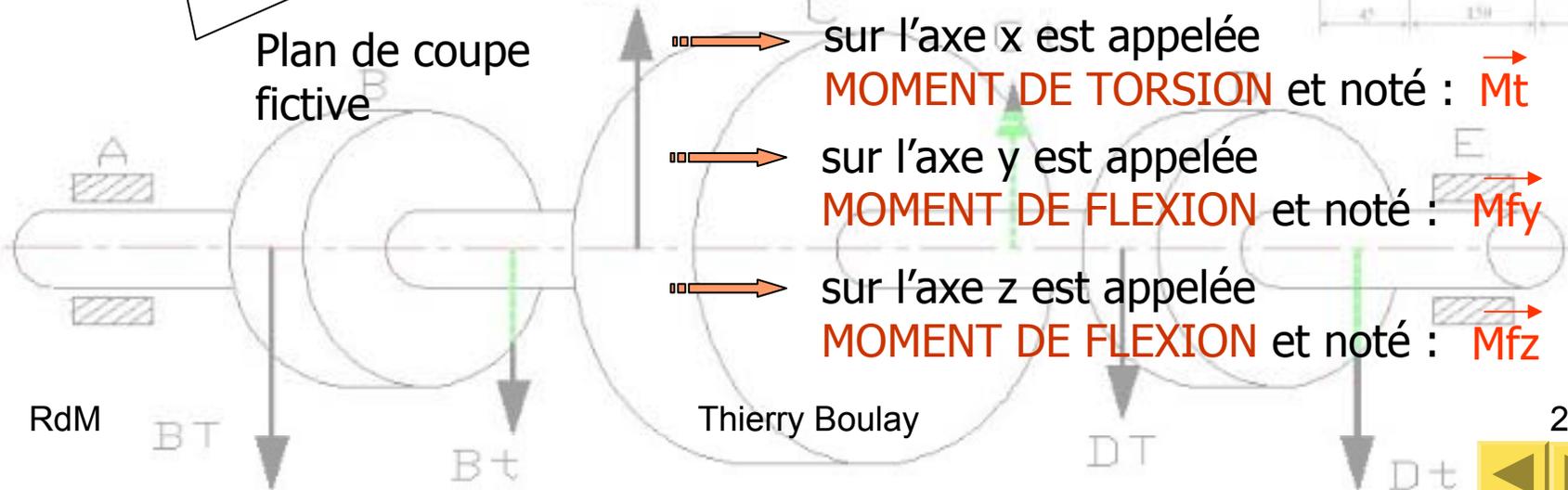
→ sur l'axe z est appelée **EFFORT TRANCHANT** et noté :  $\vec{T}_z$

La projection des moments des forces de cohésions

→ sur l'axe x est appelée **MOMENT DE TORSION** et noté :  $\vec{M}_t$

→ sur l'axe y est appelée **MOMENT DE FLEXION** et noté :  $\vec{M}_{fy}$

→ sur l'axe z est appelée **MOMENT DE FLEXION** et noté :  $\vec{M}_{fz}$



# Sollicitations simples

- 4A Décomposition

C'est en fonction des valeurs non nulles de ces éléments de réduction que l'on définira le type de sollicitations que subit la poutre dans chaque coupe fictive.

➤ Si  $N \neq 0$  ;  $T_y = 0$  ;  $T_z = 0$  ;  $M_t = 0$  ;  $M_{fy} = 0$  ;  $M_{fz} = 0$  → on a de la **traction**

Si  $N > 0$  traction si  $N < 0$  compression

➤ Si  $N = 0$  ;  **$T_y \neq 0$  et/ou  $T_z \neq 0$**  ;  $M_t = 0$  ;  $M_{fy} = 0$  ;  $M_{fz} = 0$

→ on a du **cisaillement**

➤ Si  $N = 0$  ;  $T_y = 0$  ;  $T_z = 0$  ;  **$M_t \neq 0$**  ;  $M_{fy} = 0$  ;  $M_{fz} = 0$  → on a de la **torsion**

➤ Si  $N = 0$  ;  **$T_y \neq 0$  et/ou  $T_z \neq 0$**  ;  $M_t = 0$  ;  **$M_{fy} \neq 0$  et/ou  $M_{fz} \neq 0$**

→ on a de la **flexion**

Si  $T = 0$  flexion pure si  $T \neq 0$  flexion simple



# Sollicitations simples

- 4B Préliminaire

Pour chaque sollicitation on met en place 3 équations qui permettent dans la section considérée :

de transformer les forces de cohésions intérieures en contrainte

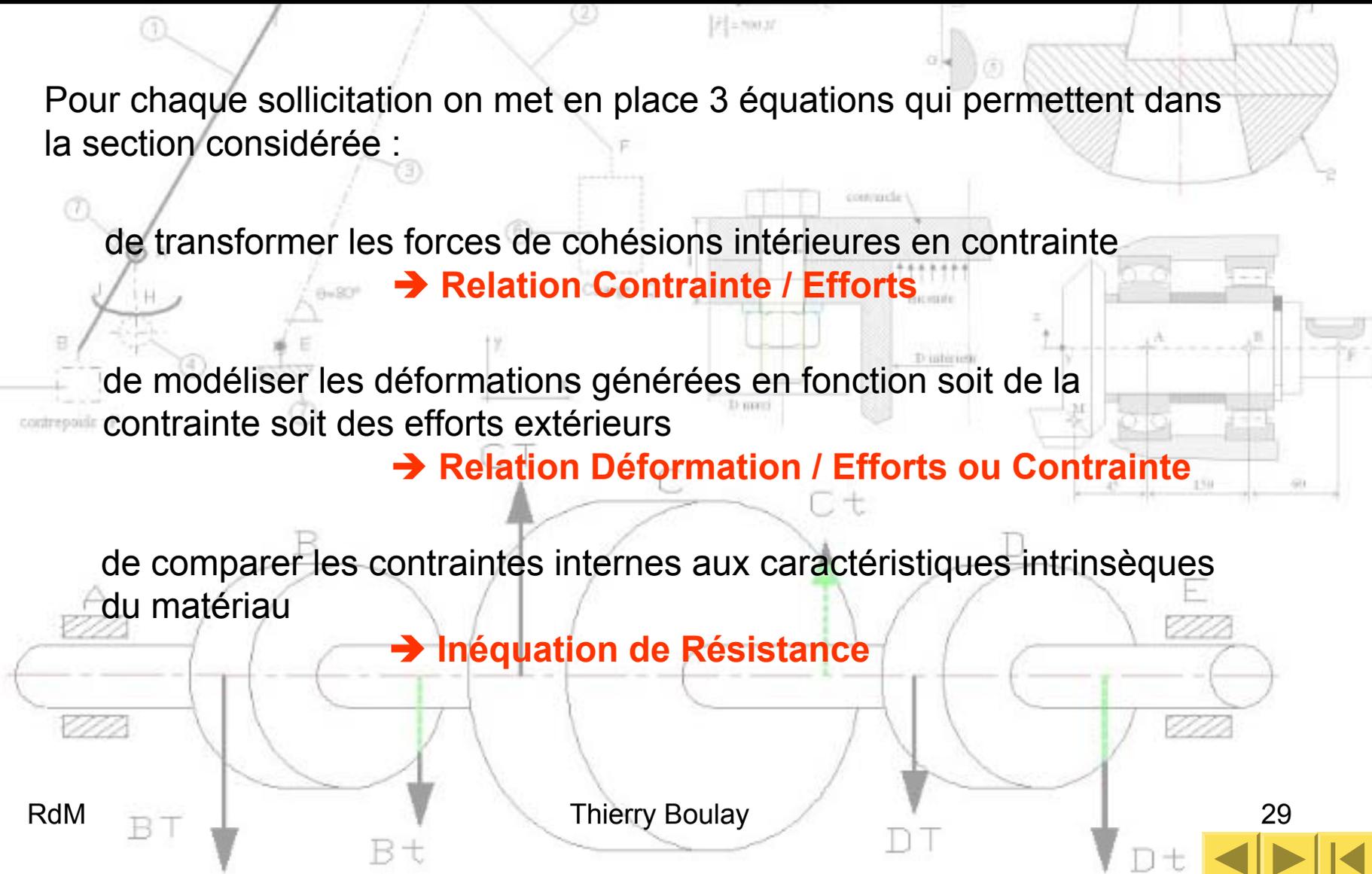
→ **Relation Contrainte / Efforts**

de modéliser les déformations générées en fonction soit de la contrainte soit des efforts extérieurs

→ **Relation Déformation / Efforts ou Contrainte**

de comparer les contraintes internes aux caractéristiques intrinsèques du matériau

→ **Inéquation de Résistance**



# Sollicitations simples

- 4C Traction

## Condition

Ligne moyenne rectiligne

➤ Si  $N > 0$  ;  $T_y = 0$  ;  $T_z = 0$  ;  $M_t = 0$  ;  $M_{fy} = 0$  ;  $M_{fz} = 0$  ➔ on a de la traction

➔ Relation Contrainte / Efforts

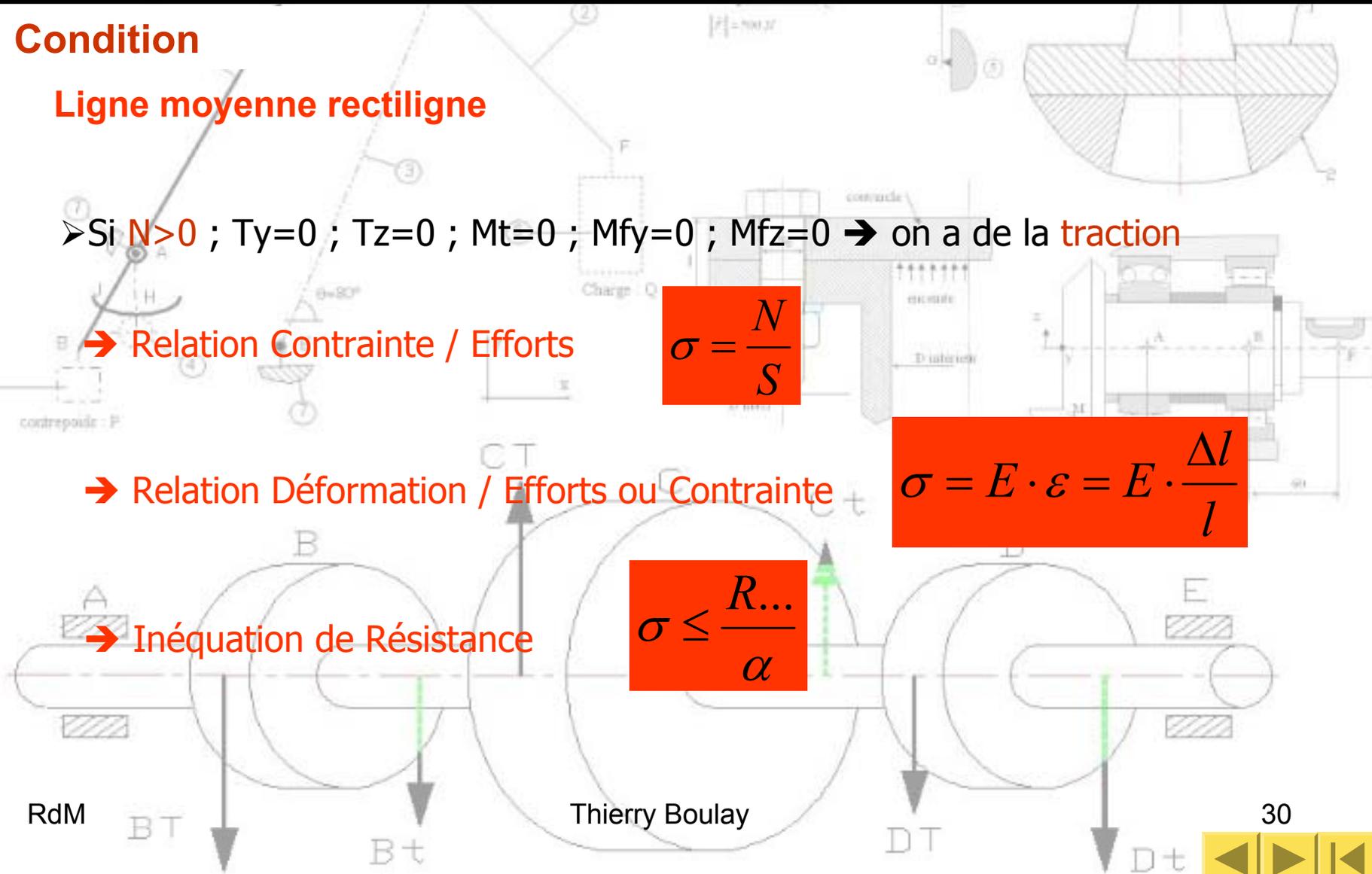
$$\sigma = \frac{N}{S}$$

➔ Relation Déformation / Efforts ou Contrainte

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

➔ Inéquation de Résistance

$$\sigma \leq \frac{R_{\dots}}{\alpha}$$



# Sollicitations simples

- 4D Compression

## Conditions

Ligne moyenne rectiligne

La longueur doit être inférieure à 8 fois la plus petite dimension transversale

➤ Si  $N < 0$  ;  $T_y = 0$  ;  $T_z = 0$  ;  $M_t = 0$  ;  $M_{fy} = 0$  ;  $M_{fz} = 0$  ➔ on a de la **compression**

➔ Relation Contrainte / Efforts

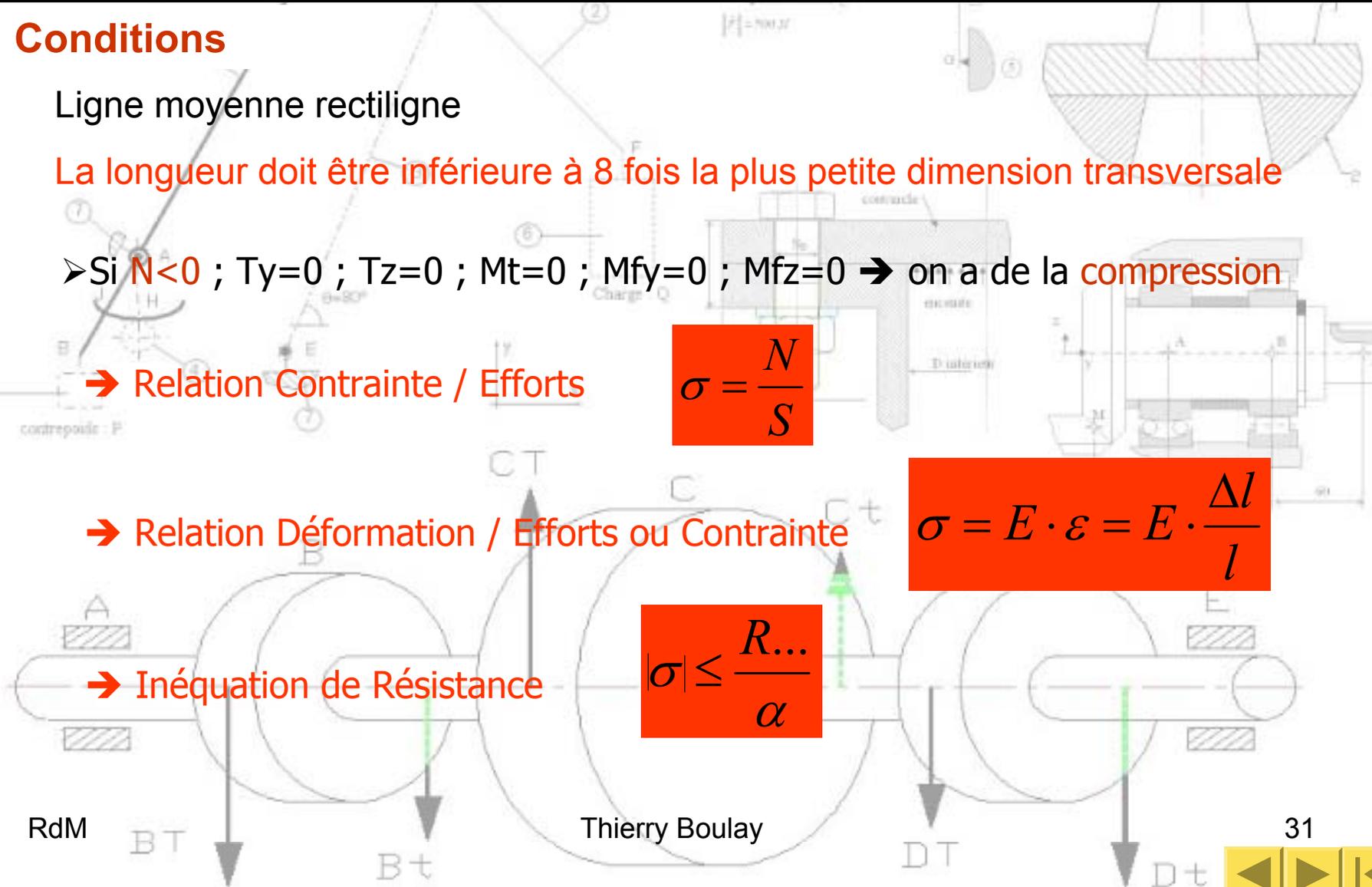
$$\sigma = \frac{N}{S}$$

➔ Relation Déformation / Efforts ou Contrainte

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

➔ Inéquation de Résistance

$$|\sigma| \leq \frac{R_{\dots}}{\alpha}$$



RdM

BT

Bt

Thierry Boulay

DT

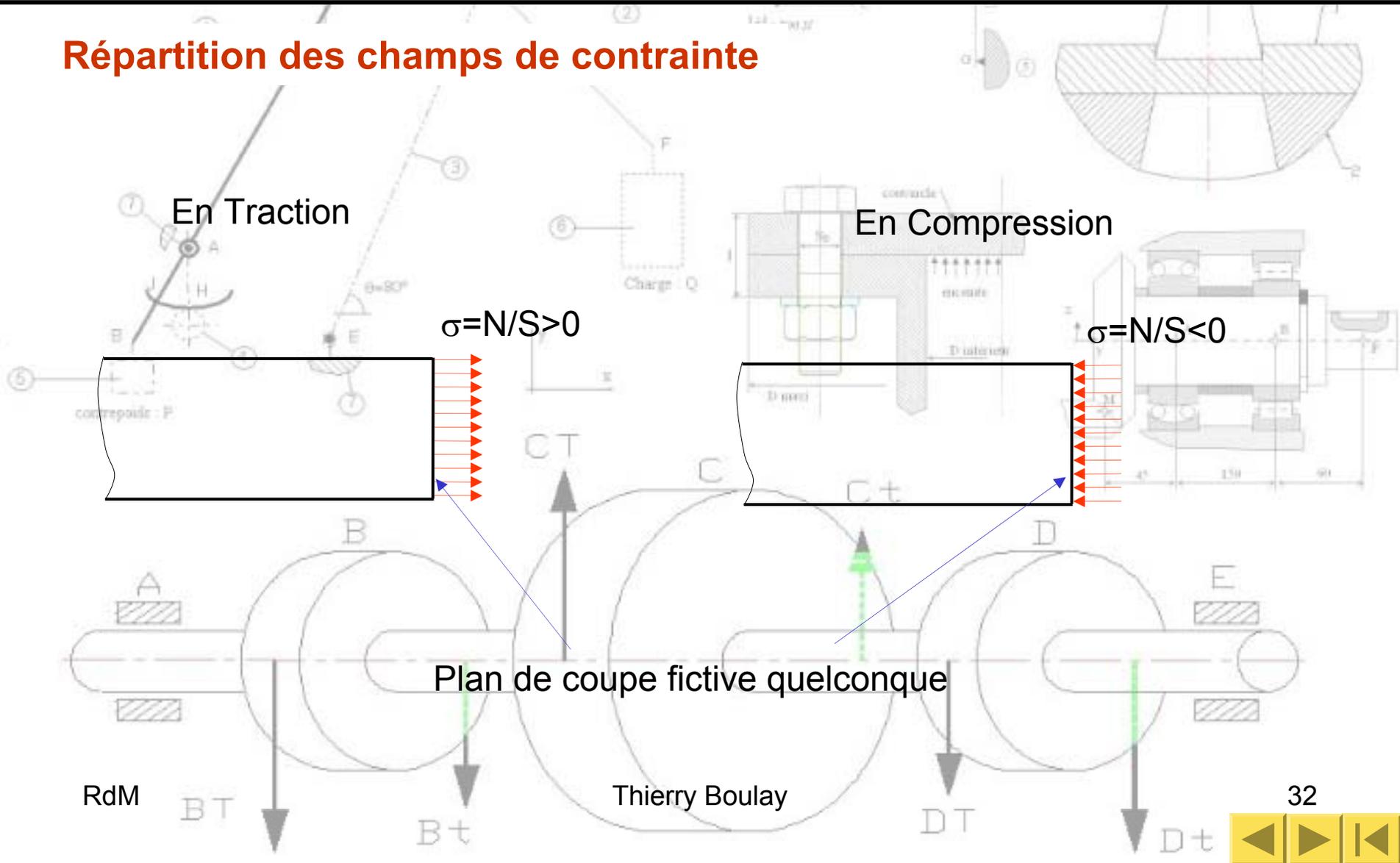
Dt



# Sollicitations simples

- 4D Traction / Compression

## Répartition des champs de contrainte



# Sollicitations simples

- 4D Traction / Compression

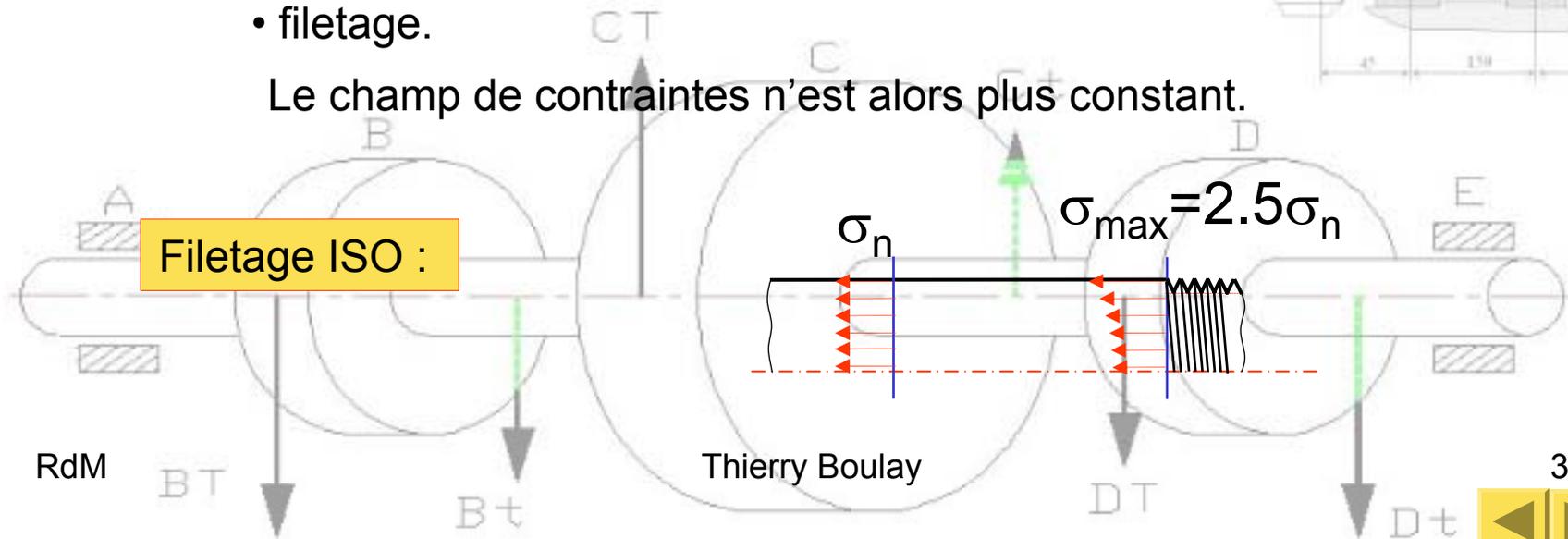
## Conditions réelles

On va ici voir apparaître la notion de **concentration de contraintes**.

Il existe de nombreux cas où la barre présente des irrégularités telles que :

- gorge,
- trou,
- épaulement,
- filetage.

Le champ de contraintes n'est alors plus constant.

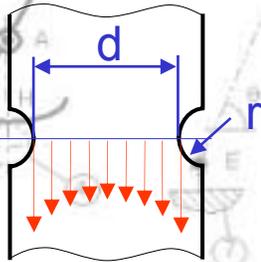


# Sollicitations simples

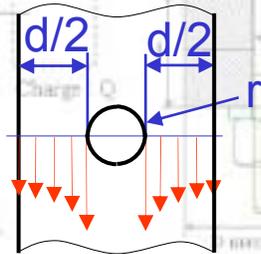
- 4D Traction / Compression

## Conditions réelles

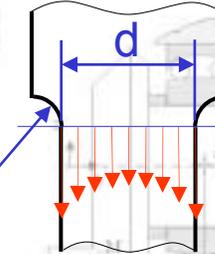
Gorge



Trou



Epaulement



$$\sigma_{\max} = k\sigma_n$$

r/d	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Gorge	2.55	2.35	2.05	1.62	1.4	1.3	1.22
Trou	2.65	2.5	2.3	2.2	2.1	2.06	2.02
épaulement	1.92	1.8	1.66	1.5	1.38	1.28	1.22

# Sollicitations simples

- 4E Cisaillement

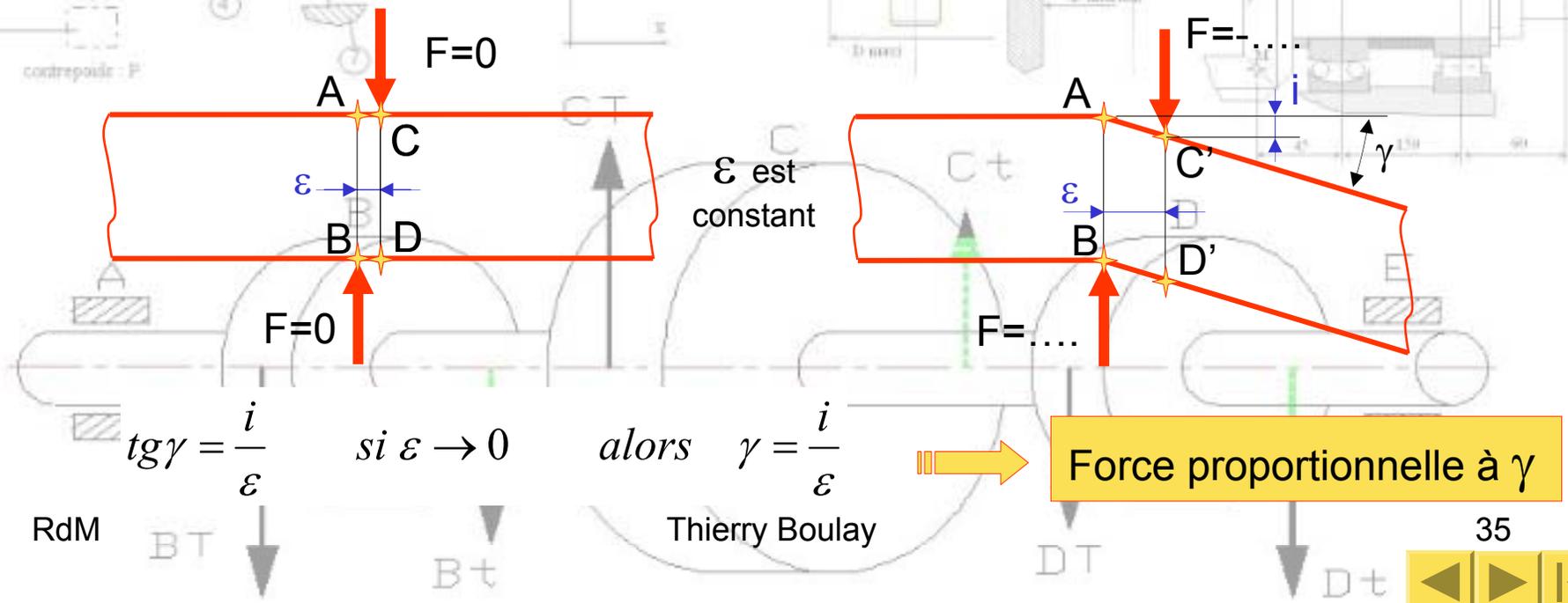
## Conditions

Ligne moyenne rectiligne

Le torseur de cohésion n'est valable qu'en UN seul point

➤ Si  $N=0$  ;  $T_y \neq 0$  et/ou  $T_z \neq 0$  ;  $M_t=0$  ;  $M_{fy}=0$  ;  $M_{fz}=0$  ➔ on a du cisaillement

## Expérience



$F=0$

$F=0$

$\epsilon$

$\epsilon$  est constant

$F=...$

$F=...$

$i$

$\gamma$

$\epsilon$

$\gamma$

$tg \gamma = \frac{i}{\epsilon}$

si  $\epsilon \rightarrow 0$

alors  $\gamma = \frac{i}{\epsilon}$

Force proportionnelle à  $\gamma$

RdM

BT

Bt

DT

Dt

Thierry Boulay

35

# Sollicitations simples

- 4E Cisaillement

Quand on fait l'équilibre du tronçon droit et en supposant que  $\varepsilon$  soit très petit, il n'existe pas de contrainte normale.

## Formulaire

→ Relation Contrainte / Efforts

$$\tau = \frac{T}{S}$$

→ Relation Déformation / Efforts ou Contrainte

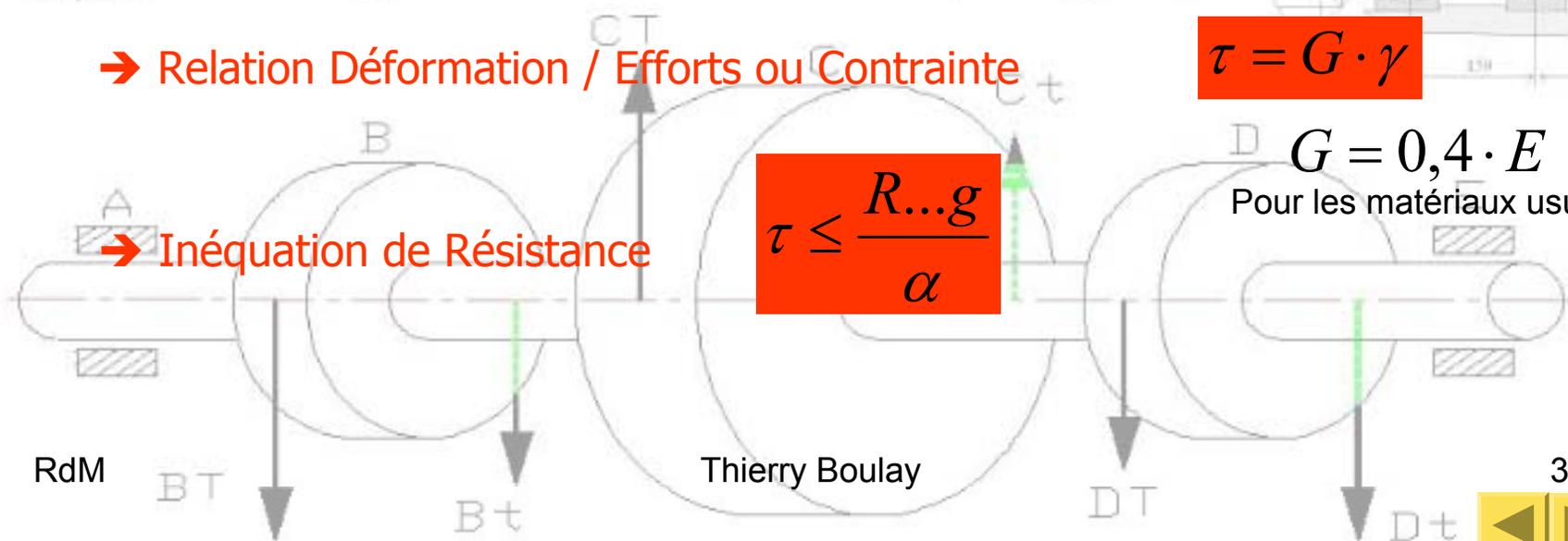
$$\tau = G \cdot \gamma$$

→ Inéquation de Résistance

$$\tau \leq \frac{R \dots g}{\alpha}$$

$$G = 0,4 \cdot E$$

Pour les matériaux usuels



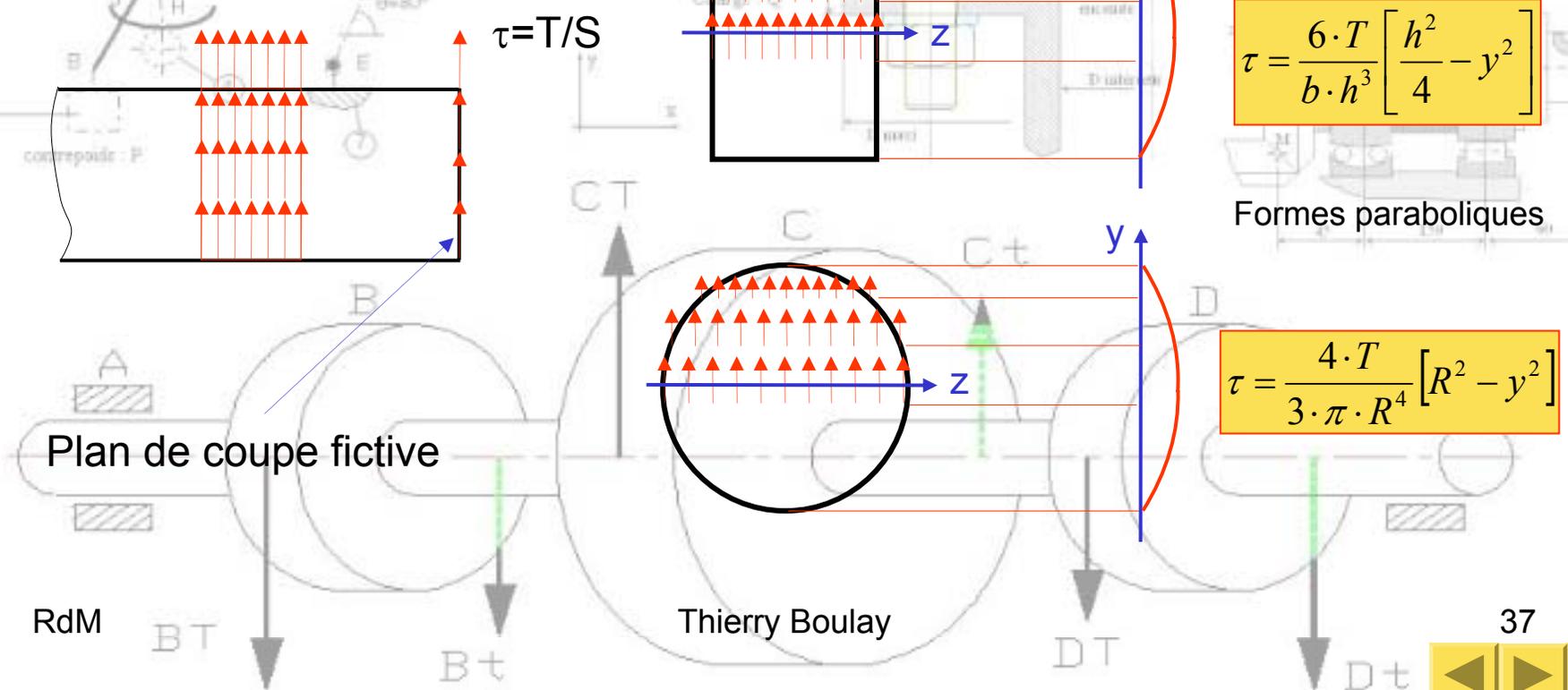
# Sollicitations simples

- 4E Cisaillement

## Répartition des champs de contraintes

En théorie par rapport à la formule

En réalité par rapport à la forme cisailée



# Sollicitations simples

- 4E Cisaillement

## Conditions réelles

Si l'on veut tenir compte du gauchissement des surfaces lors du cisaillement on peut utiliser les surfaces réduites, à savoir :

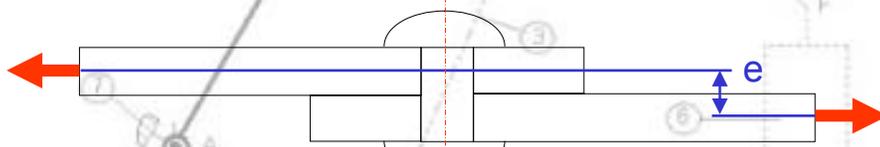
Formes cisillées	Surface normale $S$	Surface réduite prise en compte $S1$
Rectangle plein	$S = b \cdot h$	$S1 = S \cdot \frac{5}{6}$
Cylindre plein	$S = \pi \cdot R^2$	$S1 = S \cdot \frac{9}{10}$
Cylindre creux	$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot e$	$S1 = S \cdot \frac{3}{64}$

# Sollicitations simples

- 4E Cisaillement

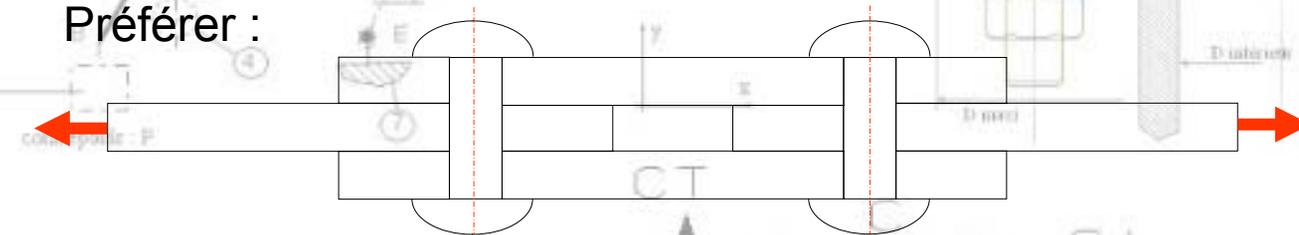
## Conditions réelles

Fixation par rivetage :



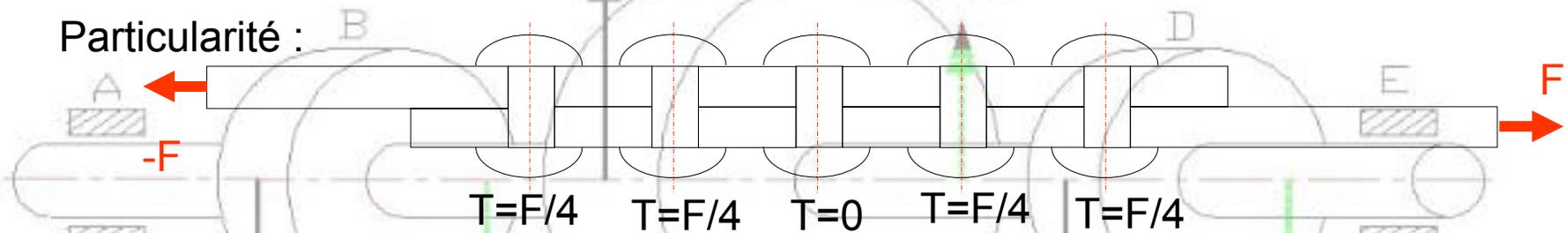
e est grand, le serrage du rivet entraîne un frottement des tôles, le rivet remplit complètement le logement

Préférer :



2 sections cisailées par rivet

Particularité :



Au-delà de 4 rivets alignés les rivets centraux ne prennent plus de chargement

# Sollicitations simples

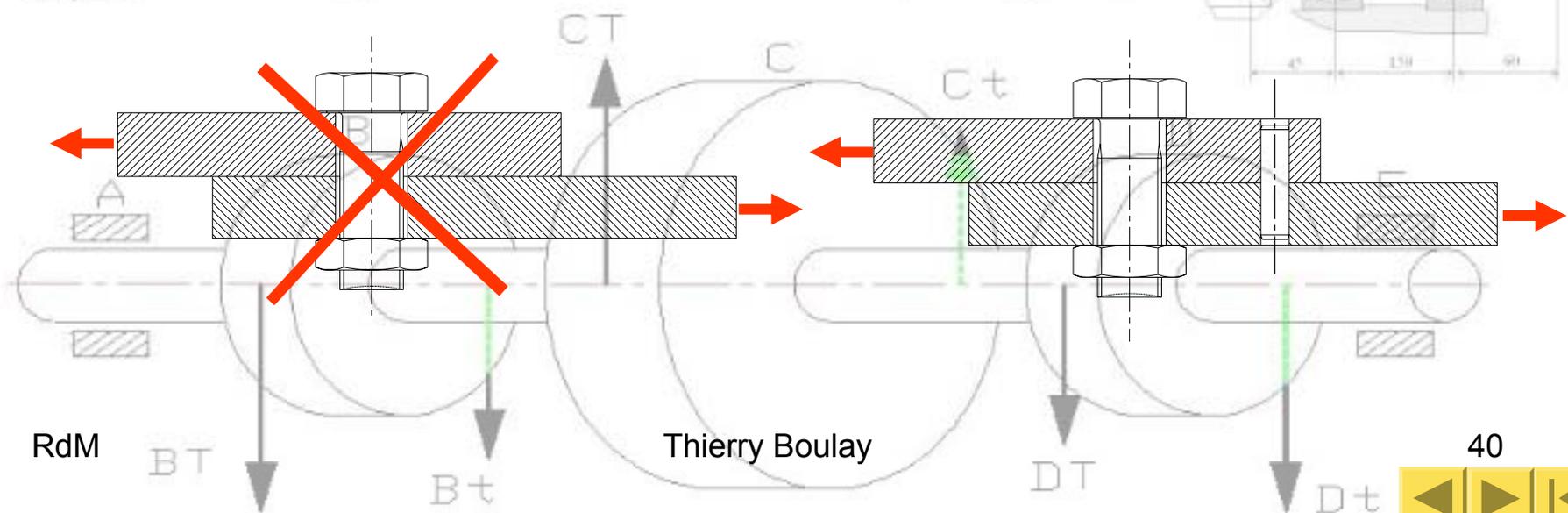
- 4E Cisaillement

## Conditions réelles

Fixation par soudage :



Fixation par boulonnage :



Thierry Boulay



# Sollicitations simples

- 4F Torsion

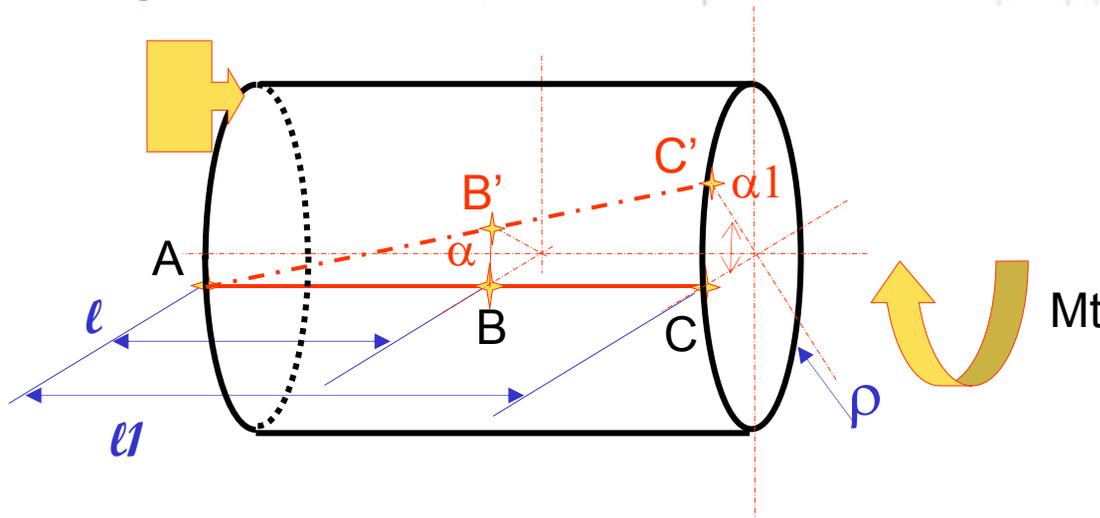
## Conditions

Ligne moyenne rectiligne

Chaque section droite doit être circulaire

➤ Si  $N=0$  ;  $T_y=0$  ;  $T_z=0$  ;  $M_t \neq 0$  ;  $M_{fy}=0$  ;  $M_{fz}=0$  → on a de la torsion

## Expérience



Expérimentation

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\alpha_1}{l_1} = cste = \theta$$

Angle de déformation unitaire [rad/mm]

# Sollicitations simples

- 4F Torsion

## Formulaire

→ Relation Contrainte / Efforts

$$\tau = \frac{Mt}{I_0 \frac{v}{\rho}}$$

Pour une section circulaire

$$I_0 = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad v = \frac{d}{2}$$

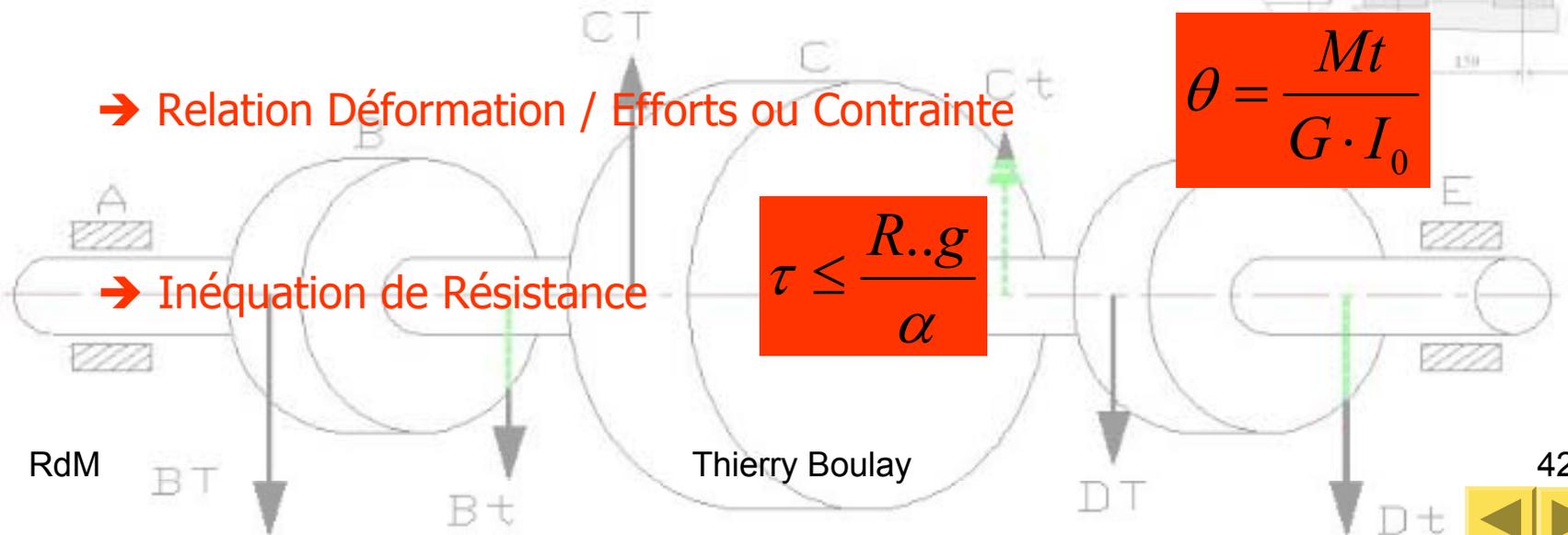
Avec :  $I_0$  moment quadratique polaire (porté par l'axe normal à la coupe fictive)  
 $v$  distance entre la fibre neutre et la fibre la plus sollicitée

→ Relation Déformation / Efforts ou Contrainte

$$\theta = \frac{Mt}{G \cdot I_0}$$

→ Inéquation de Résistance

$$\tau \leq \frac{R \cdot g}{\alpha}$$



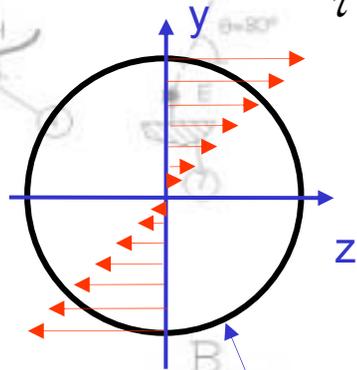
# Sollicitations simples

- 4F Torsion

## Répartition des champs de contraintes

Dans les hypothèses de départ nous n'avons retenu que les sections circulaires, on obtiendra donc la répartition suivante des contraintes :

$$\tau = \frac{Mt}{I_0 / \nu}$$

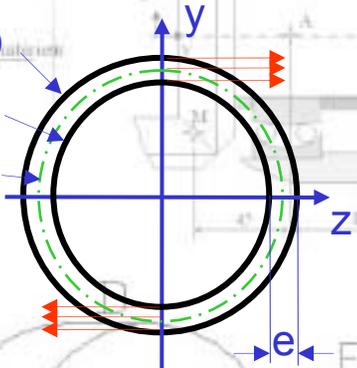


Dans une section circulaire tubulaire mince :

Diamètre ext : D

Diamètre int : d

Rayon moyen : R



$$\tau = \frac{Mt}{2 \cdot \pi \cdot e \cdot R^2}$$

Plan de coupe fictive

# Sollicitations simples

- 4F Torsion

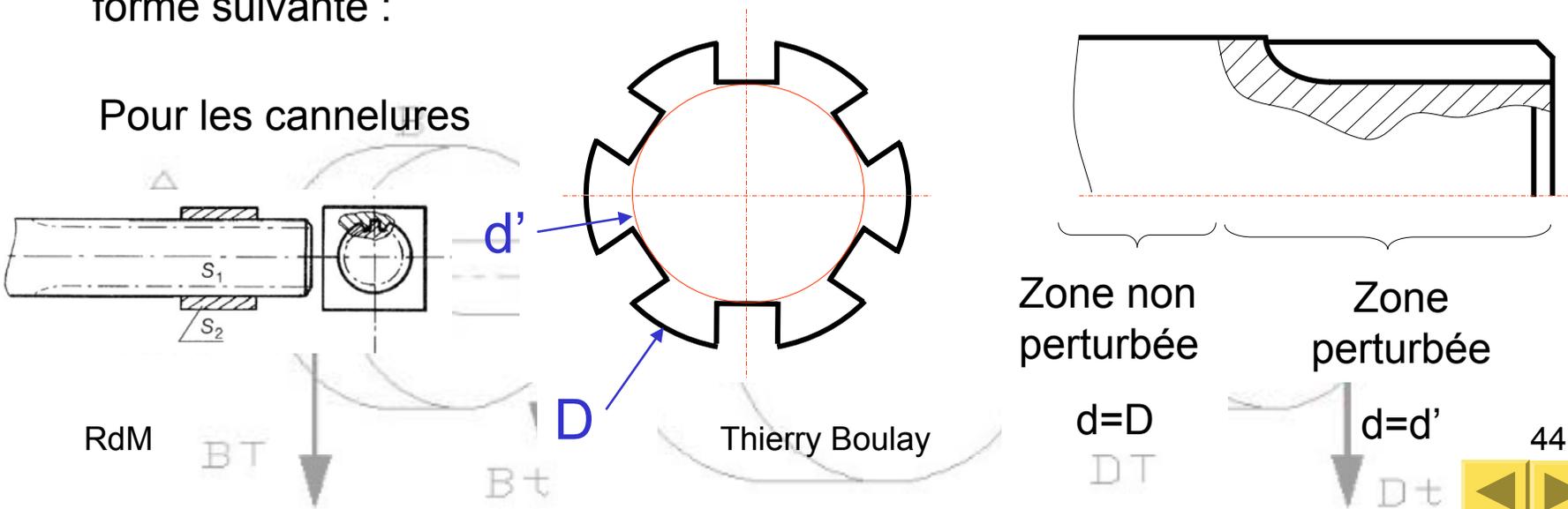
## Conditions réelles

La transmission des couples peut se faire par l'intermédiaire de :

- Roues, poulies, engrenages,
- Joints d'accouplement,
- Disques d'embrayage.

Pour les deux premiers cas, la transmission de puissance se fait soit par clavettes soit par cannelures. La répartition des contraintes est alors de la forme suivante :

Pour les cannelures

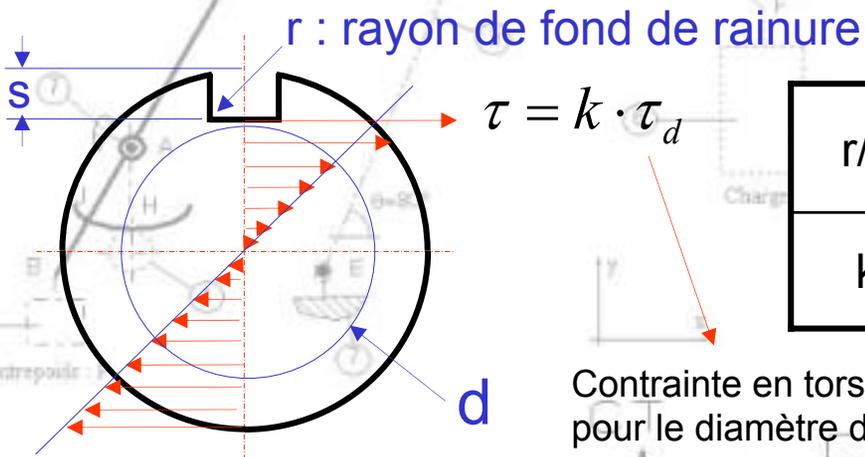


# Sollicitations simples

- 4F Torsion

## Conditions réelles

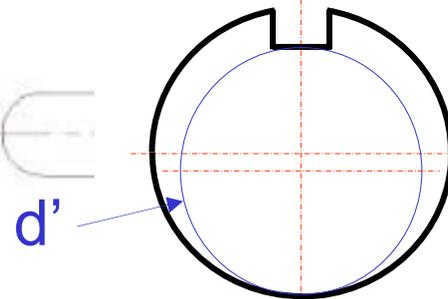
Pour les clavettes



r/s	0,1	0,2	0,33	0,5
k	5,4	3,4	2,7	2,1

Contrainte en torsion simple pour le diamètre  $d$

Pour un calcul plus rapide et en première approximation on peut prendre le diamètre  $d'$



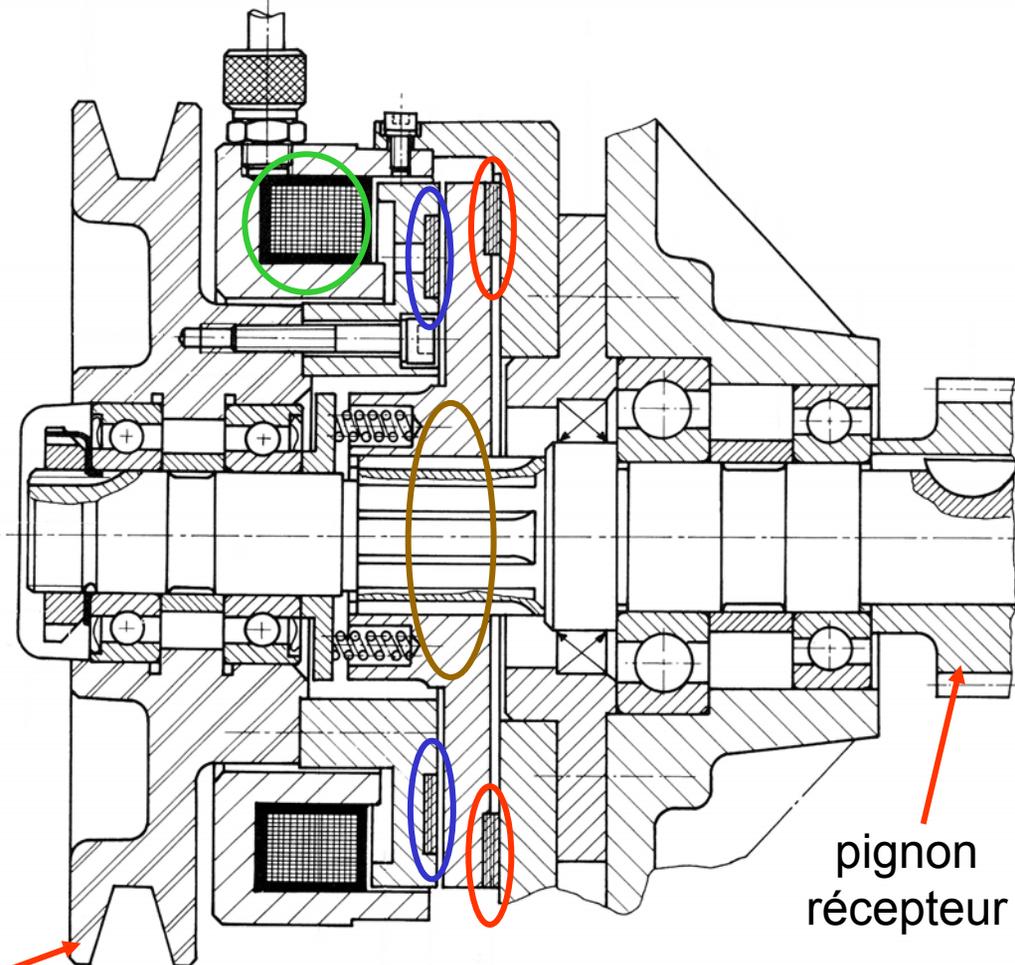
# Sollicitations simples

- 4F Torsion

## Conditions réelles

Pour le cas de l'embrayage, le couple transmis est souvent le résultat du principe du **frottement** (ou de l'adhérence) et d'un **effort de poussée** d'un **disque moteur** sur un **disque récepteur**.

On aura alors à vérifier que la somme des deux sollicitations de torsion et de compression est compatible avec les caractéristiques du matériau.



RdM

BT

Bt

Poulie motrice

Thierry Boulay

DT

Dt

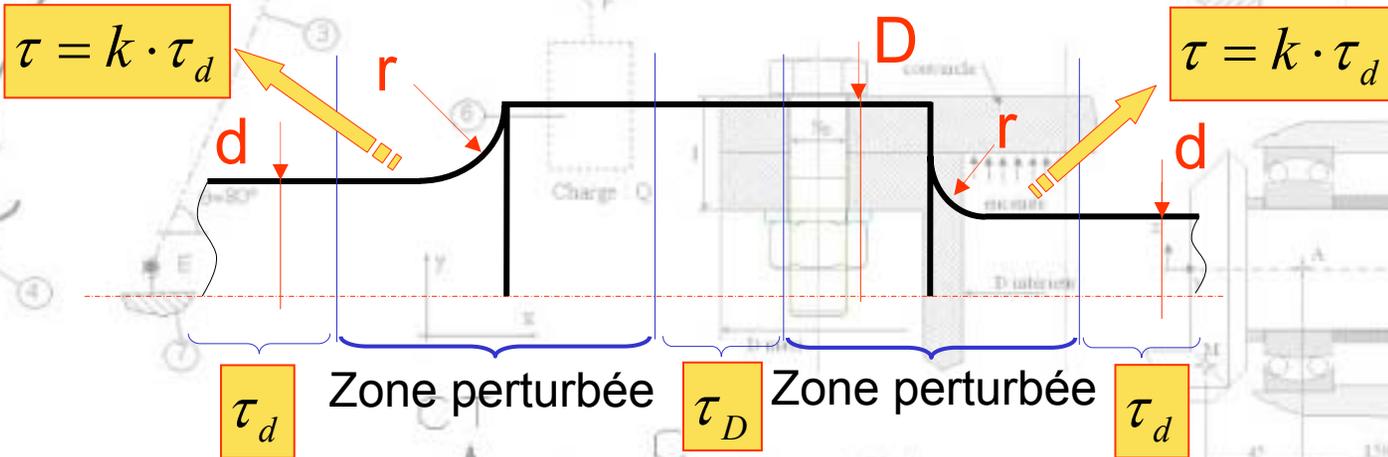
pignon récepteur

# Sollicitations simples

- 4F Torsion

## Conditions réelles

Cas des poutres réelles à section circulaires mais variables.



D/d \ r/D	0,1	0,05	0,02
1,09	1,3	1,5	1,7
1,2	1,5	1,7	2,5
1,5	1,7	2,2	2,7

RdM

BT

Bt

Thierry Boulay

DT

Dt

# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Conditions

Ligne moyenne rectiligne

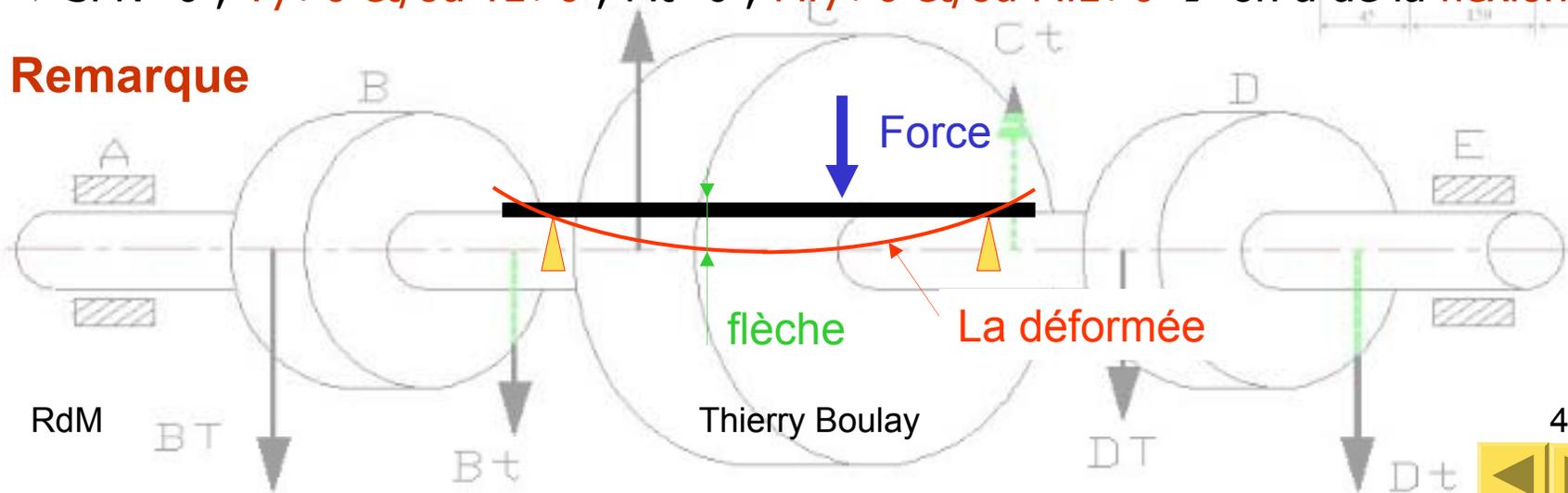
La poutre doit présenter un plan de symétrie

Les forces extérieures doivent être perpendiculaires à la ligne moyenne **ET** appartenir au plan de symétrie

Les moments des forces doivent être perpendiculaires à la ligne moyenne **ET** perpendiculaire au plan de symétrie

➤ Si  $N=0$  ;  $T_y \neq 0$  et/ou  $T_z \neq 0$  ;  $M_t=0$  ;  $M_{fy} \neq 0$  et/ou  $M_{fz} \neq 0$  → on a de la flexion

## Remarque



# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Formulaire

→ Relation Contrainte / Efforts

$$\sigma = \frac{Mf}{I_{\alpha\beta} \cdot v}$$

section circulaire	section rectangulaire
$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$I_{\alpha\beta} = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Avec :  $I_{\alpha\beta}$  moment quadratique axial

(porté par l'axe perpendiculaire au plan de chargement et à la coupe fictive)

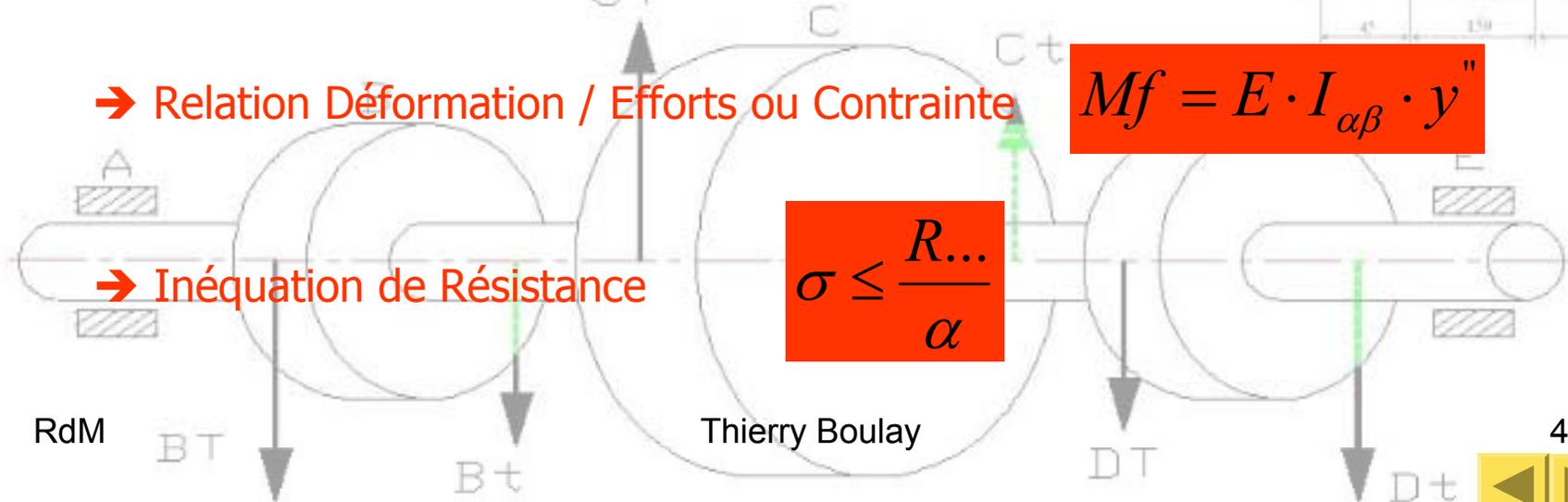
$v$  distance entre la fibre neutre et la fibre la plus sollicitée

→ Relation Déformation / Efforts ou Contrainte

$$Mf = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''$$

→ Inéquation de Résistance

$$\sigma \leq \frac{R_{\dots}}{\alpha}$$

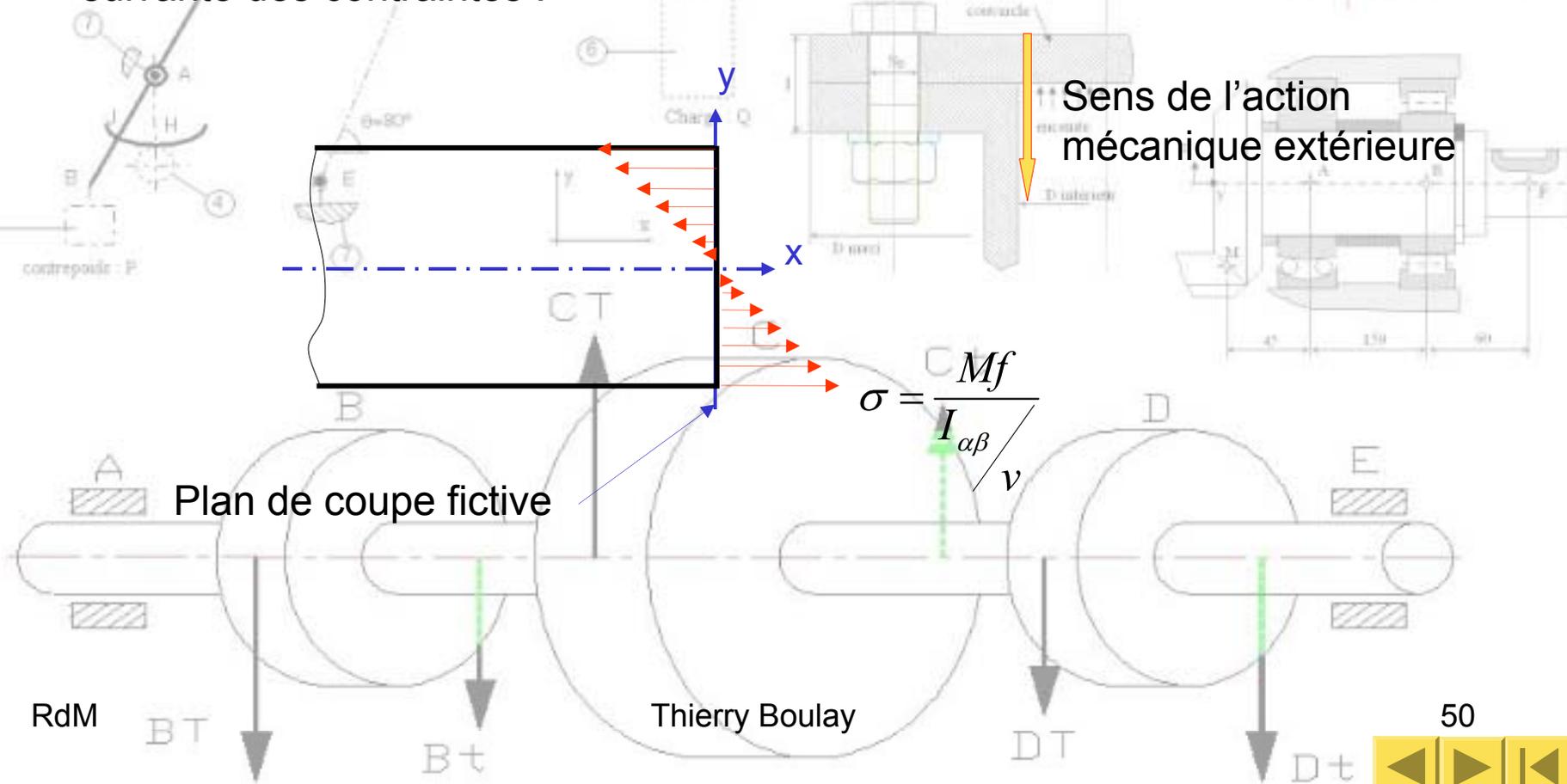


# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Répartition des champs de contraintes

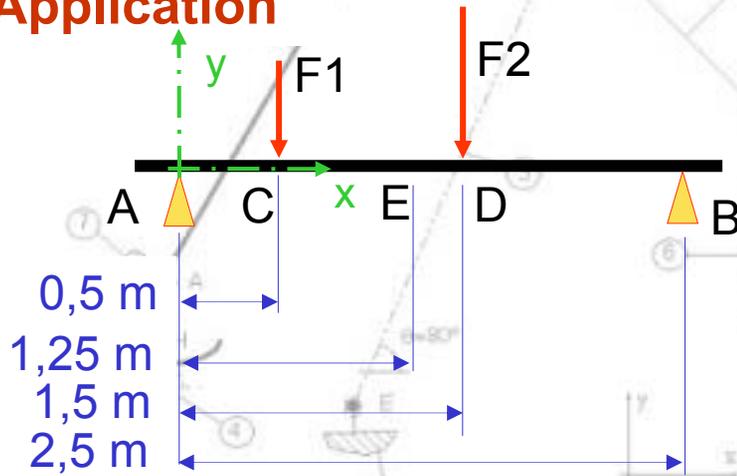
Dans les hypothèses de départ retenues, on obtiendra donc la répartition suivante des contraintes :



# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Application



La poutre utilisée est en acier laminé marchand S235. Le profil est rectangulaire avec une base maximale de 40 mm.

On souhaite que la déformation maximale au milieu de la poutre soit inférieure à 15 mm

$$\|F1\| = 5000\text{ N} \quad \|F2\| = 8000\text{ N}$$

## Étude statique pour la détermination des réactions aux appuis

On place un repère en A et on applique le PFD et plus particulièrement l'équation des moments aux deux points A et B pour obtenir les valeurs des réactions

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}/A} = \vec{0} \Rightarrow -5000 \cdot 0,5 - 8000 \cdot 1,5 + R_B \cdot 2,5 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{2500 + 12000}{2,5} = 5800$$

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}/B} = \vec{0} \Rightarrow 8000 \cdot 1 + 5000 \cdot 2 - R_A \cdot 2,5 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{8000 + 10000}{2,5} = 7200$$

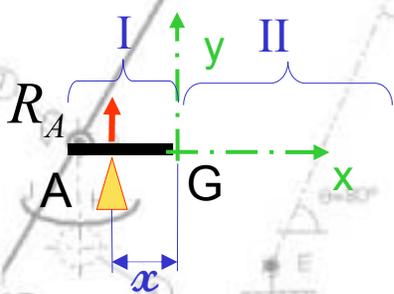


# Sollicitations simples

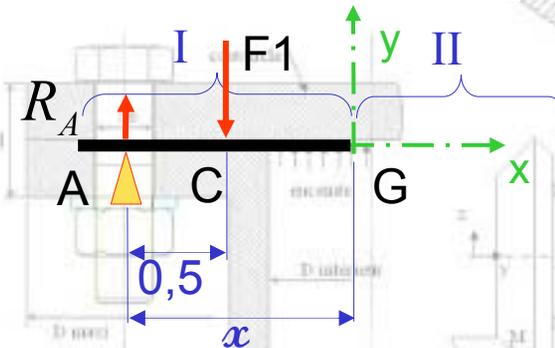
- 4G Flexion

Il existe 4 AME. On fera donc 3 (n-1) coupes fictives.

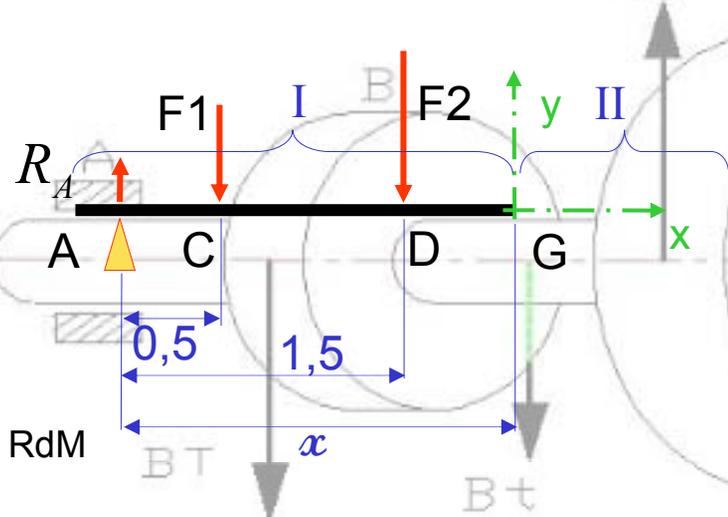
## Étude 1 zone AC



## Étude 2 zone CD



## Étude 3 zone DB



$$\{T_{coh}^G_{II/I}\} = \begin{Bmatrix} N \\ T_Y \\ M_{fz} \end{Bmatrix}$$

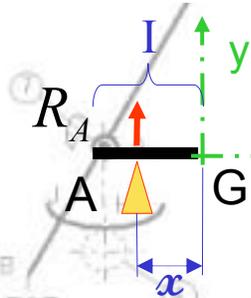


# Sollicitations simples

- 4G Flexion

Étude statique de chaque zone

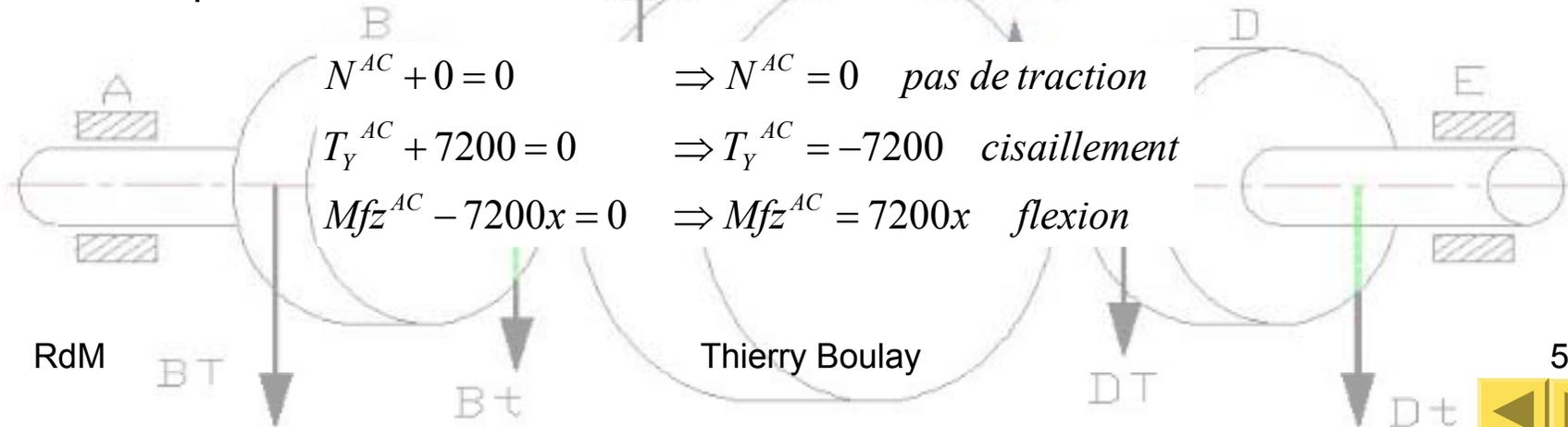
Étude statique de la zone AC



$$\{T_{coh}^G_{II/I}\} = \begin{Bmatrix} N \\ T_Y \\ M_{fz} \end{Bmatrix}_G \quad \{T^A_{S/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$$

Transport au point G  $\{T^A_{S/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ 0 \end{Bmatrix}_G + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 7200 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ -7200x \end{Bmatrix}_G$

PFD au point G avec résolution



$$N^{AC} + 0 = 0 \quad \Rightarrow N^{AC} = 0 \quad \text{pas de traction}$$

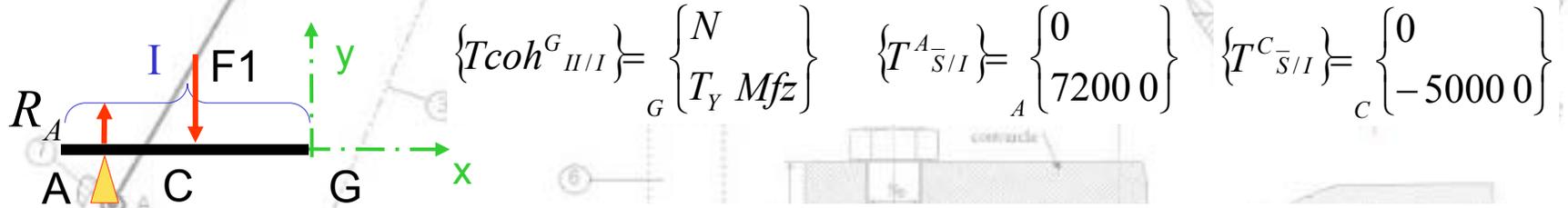
$$T_Y^{AC} + 7200 = 0 \quad \Rightarrow T_Y^{AC} = -7200 \quad \text{cisaillement}$$

$$M_{fz}^{AC} - 7200x = 0 \quad \Rightarrow M_{fz}^{AC} = 7200x \quad \text{flexion}$$

# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Étude statique de la zone CD



Transport au point G  $\{T^{A\bar{S}/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -x \\ 0 \\ 7200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ -7200x \end{Bmatrix}$

$\{T^{C\bar{S}/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -(x-0.5) \\ 0 \\ -5000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 5000 \cdot (x-0.5) \end{Bmatrix}$

PFD au point G avec résolution

$$N^{CD} + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow N^{CD} = 0 \quad \text{pas de traction}$$

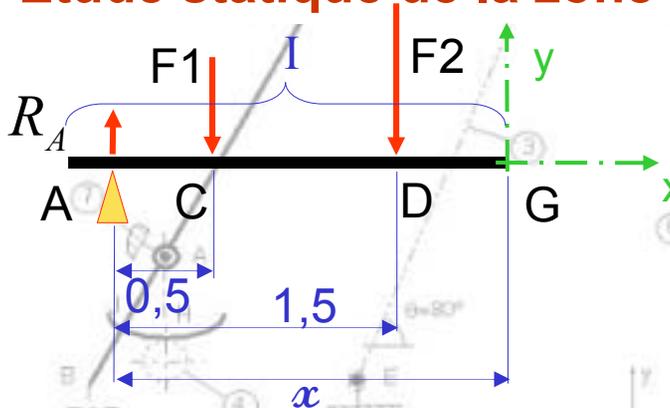
$$T_Y^{CD} + 7200 - 5000 = 0 \quad \Rightarrow T_Y^{CD} = -2200 \quad \text{cisaillement}$$

$$Mfz^{CD} - 7200x + 5000(x - 0.5) = 0 \quad \Rightarrow Mfz^{CD} = 7200x - 5000(x - 0.5) \quad \text{flexion}$$

# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Étude statique de la zone DB



$$\{T_{coh}^G_{II/I}\} = \begin{Bmatrix} N \\ T_Y \\ Mfz \end{Bmatrix}$$

$$\{T^{A\bar{S}/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T^{C\bar{S}/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T^{D\bar{S}/I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Transport au point G

$$\{T^{D\bar{S}/I}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8000 \\ 0 \end{Bmatrix}_G + \begin{pmatrix} -(x-1.5) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -8000 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8000 \\ 8000 \cdot (x-1.5) \end{Bmatrix}_G$$

PFD au point G avec résolution

$$N^{DB} + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow N^{DB} = 0 \quad \text{pas de traction}$$

$$T_Y^{DB} + 7200 - 5000 - 8000 = 0$$

$$\Rightarrow T_Y^{DB} = 5800 \quad \text{cisaillement}$$

$$Mfz^{DB} - 7200x + 5000(x-0.5) + 8000(x-1.5) = 0$$

$$\Rightarrow Mfz^{DB} = 7200x - 5000(x-0.5) - 8000(x-1.5) \quad \text{flexion}$$

RdM

BT

Bt

Thierry Boulay

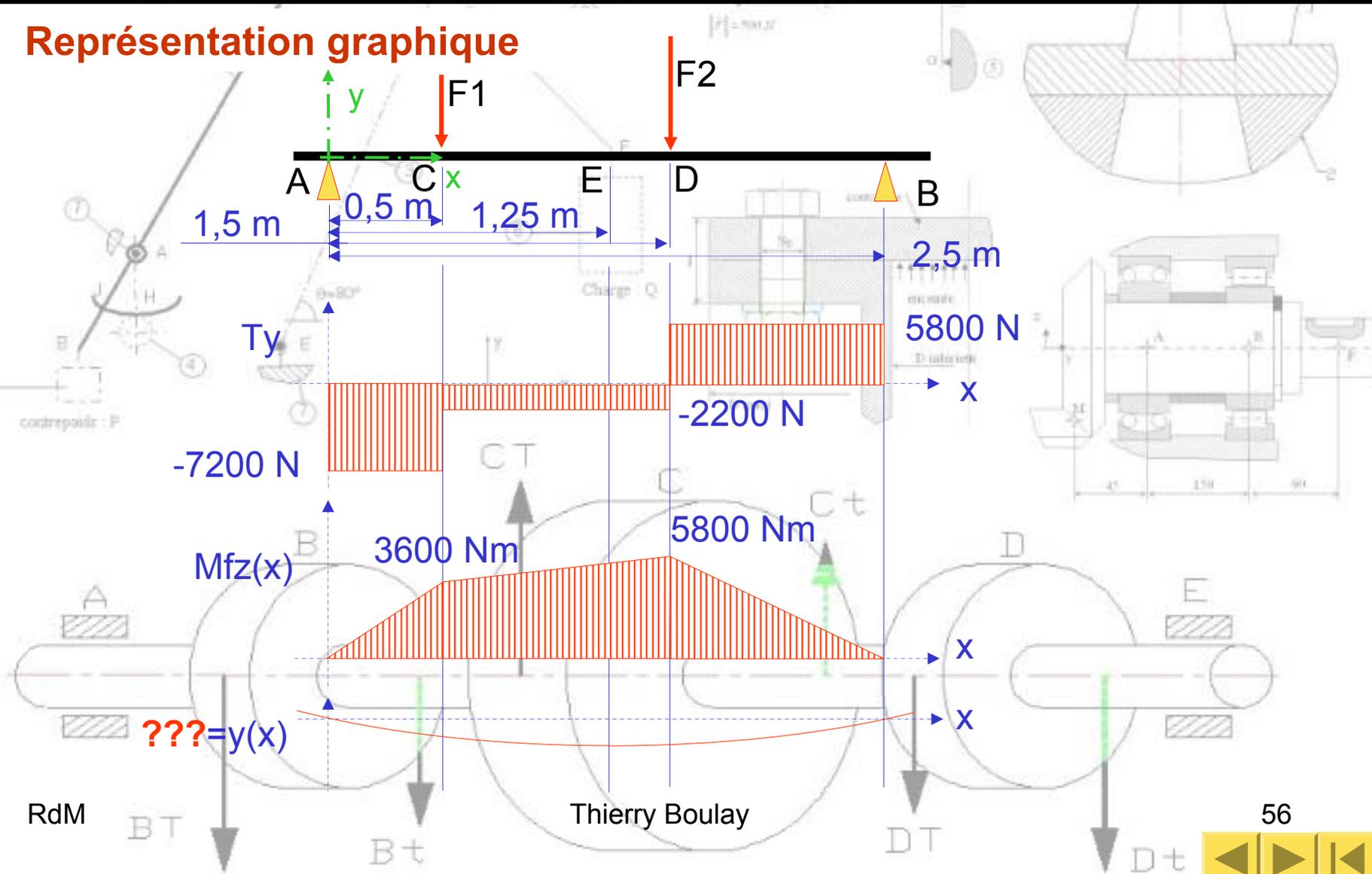
DT

Dt

# Sollicitations simples

- 4G Flexion

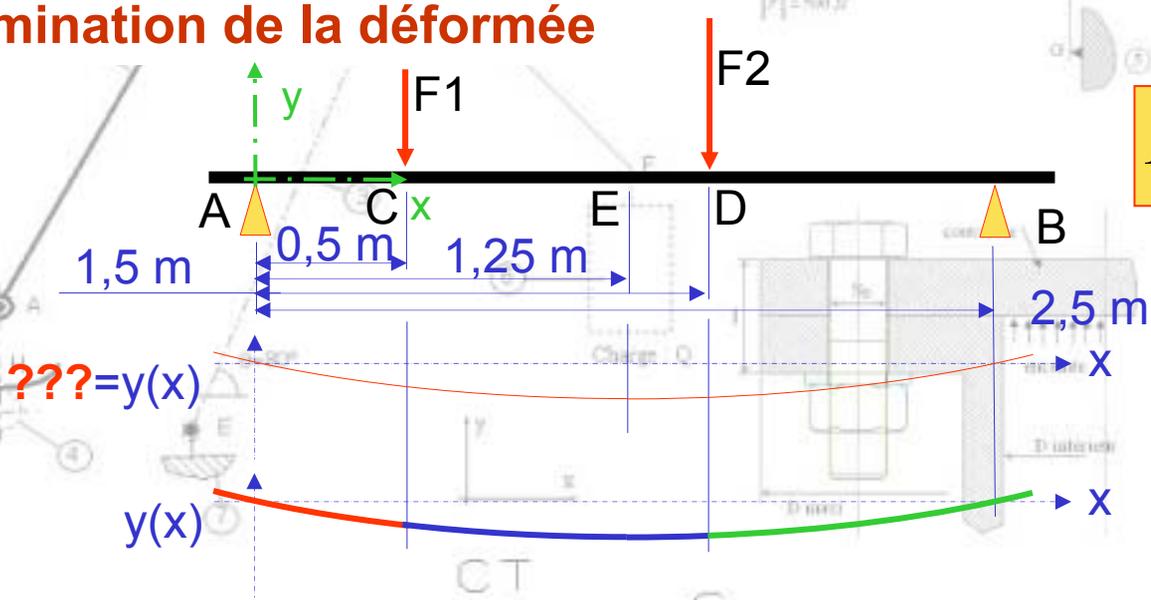
## Représentation graphique



# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Détermination de la déformée



$$Mf = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''$$

—  $Mfz^{AC} = 7200x = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''_{AC}(x)$

—  $Mfz^{CD} = 7200x - 5000(x - 0.5) = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''_{CD}(x)$

—  $Mfz^{DB} = 7200x - 5000(x - 0.5) - 8000(x - 1.5) = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''_{DB}(x)$

Les trois fonctions  $y(x)$  sont des primitives, qu'il faut calculer.



# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Détermination de la déformée

$$M_{fz}^{AC} = 7200x = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''_{AC}(x)$$

$$7200 \frac{x^2}{2} + C1 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y'_{AC}(x)$$

$$7200 \frac{x^3}{6} + C1 \cdot x + C2 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y_{AC}(x)$$

$$M_{fz}^{CD} = 7200x - 5000(x - 0.5) = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''_{CD}(x)$$

$$7200 \frac{x^2}{2} - 5000 \frac{(x-0.5)^2}{2} + C3 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y'_{CD}(x)$$

$$7200 \frac{x^3}{6} - 5000 \frac{(x-0.5)^3}{6} + C3 \cdot x + C4 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y_{CD}(x)$$

$$M_{fz}^{DB} = 7200x - 5000(x - 0.5) - 8000(x - 1.5) = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''_{DB}(x)$$

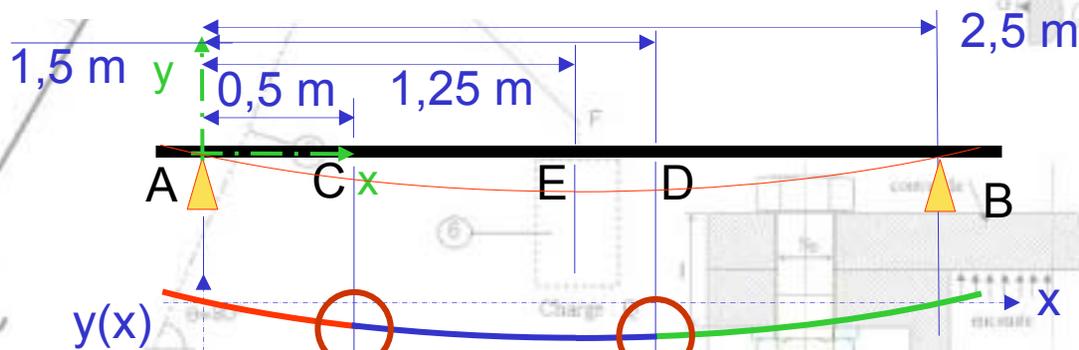
$$7200 \frac{x^2}{2} - 5000 \frac{(x-0.5)^2}{2} - 8000 \frac{(x-1.5)^2}{2} + C5 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y'_{DB}(x)$$

$$7200 \frac{x^3}{6} - 5000 \frac{(x-0.5)^3}{6} - 8000 \frac{(x-1.5)^3}{6} + C5 \cdot x + C6 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y_{DB}(x)$$

# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Détermination de la déformée



Le calcul des primitives fait apparaître des constantes d'intégration qu'il faut déterminer.

- On a d'abord la continuité entre fonctions :

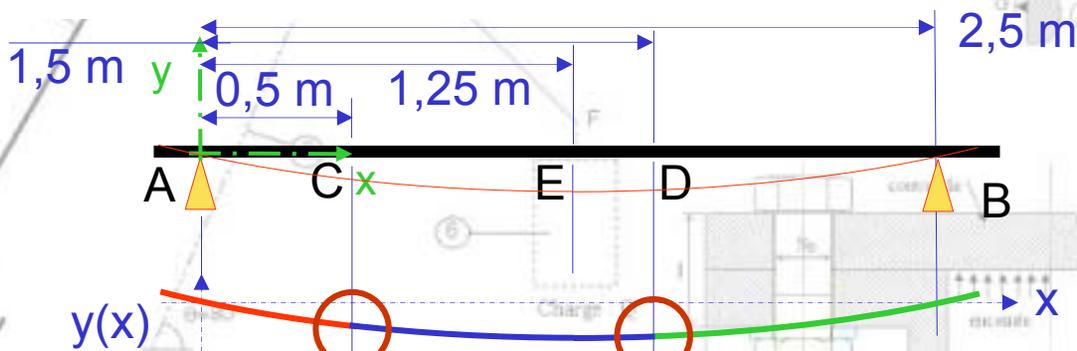
$$y_{\text{gauche}}(x = \dots) = y_{\text{droite}}(x = \dots)$$

$$y'_{\text{gauche}}(x = \dots) = y'_{\text{droite}}(x = \dots)$$

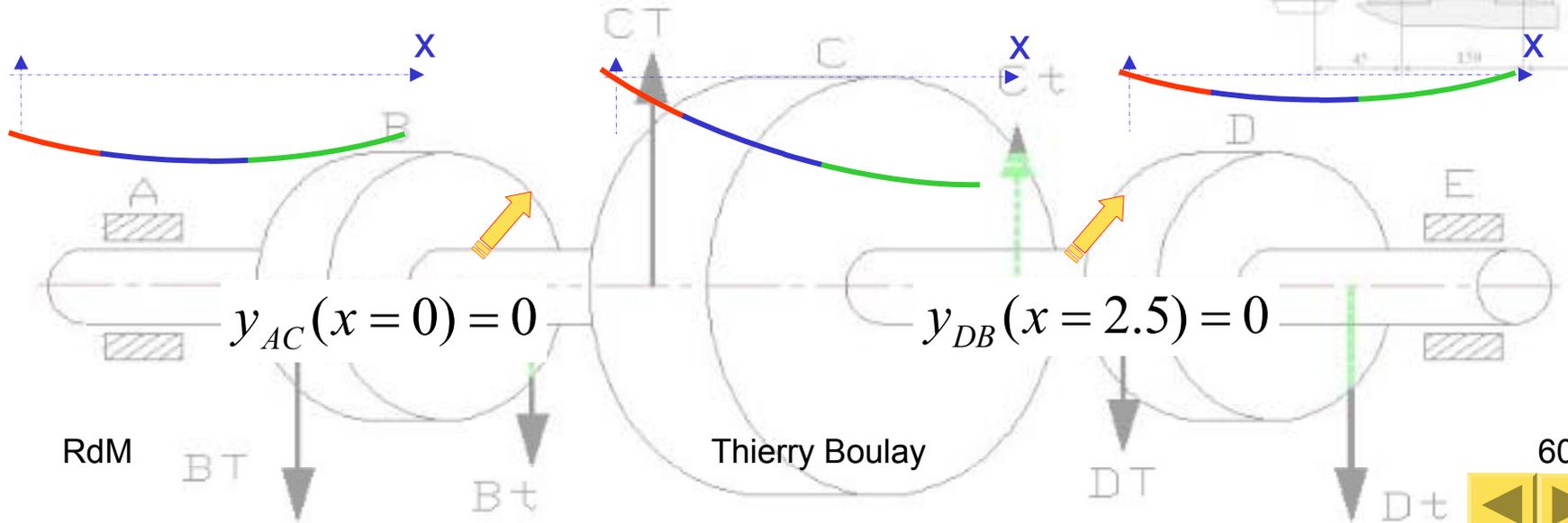
# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Détermination de la déformée



On a ensuite les conditions initiales pour la fonction globale :



# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Détermination de la déformée (Détermination des constantes)

$$(a) : y'_{AC}(x=0.5) = y'_{CD}(x=0.5)$$

$$(b) : y'_{CD}(x=1.5) = y'_{DB}(x=1.5)$$

$$(c) : y_{AC}(x=0.5) = y_{CD}(x=0.5)$$

$$(d) : y_{CD}(x=1.5) = y_{DB}(x=1.5)$$

$$(e) : y_{AC}(x=0) = 0$$

$$(f) : y_{DB}(x=2.5) = 0$$

$$(a) : 7200 \frac{0.5^2}{2} + C1 = 7200 \frac{0.5^2}{2} - 5000 \frac{(0.5-0.5)^2}{2} + C3 \Rightarrow C1 = C3$$

$$(b) : 7200 \frac{1.5^2}{2} - 5000 \frac{(1.5-0.5)^2}{2} + C3 = 7200 \frac{1.5^2}{2} - 5000 \frac{(1.5-0.5)^2}{2} - 8000 \frac{(1.5-1.5)^2}{2} + C5 \Rightarrow C3 = C5$$

$$(c) : 7200 \frac{0.5^3}{6} + C1 \cdot 0.5 + C2 = 7200 \frac{0.5^3}{6} - 5000 \frac{(0.5-0.5)^3}{6} + C3 \cdot 0.5 + C4 \Rightarrow C2 = C4$$

$$(d) : 7200 \frac{1.5^3}{6} - 5000 \frac{(1.5-0.5)^3}{6} + C3 \cdot 1.5 + C4 = 7200 \frac{1.5^3}{6} - 5000 \frac{(1.5-0.5)^3}{6} - 8000 \frac{(1.5-1.5)^3}{6} + C5 \cdot 1.5 + C6 \Rightarrow C4 = C6$$

$$(e) : 7200 \frac{0^3}{6} + C1 \cdot 0 + C2 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y_{AC}(x=0) = 0 \Rightarrow C2 = 0$$

$$(f) : 7200 \frac{2.5^3}{6} - 5000 \frac{(2.5-0.5)^3}{6} - 8000 \frac{(2.5-1.5)^3}{6} + C5 \cdot 2.5 + C6 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y_{DB}(x=2.5) = 0 \Rightarrow C5 = -4300$$

# Sollicitations simples

- 4G Flexion

## Réponse à la question posée

La poutre utilisée est en acier laminé marchand S235. Le profil est rectangulaire avec une base maximale de 40 mm.

On souhaite que la déformation maximale au milieu de la poutre soit inférieure à 15 mm.

Le milieu de la poutre se situe au point E, donc dans la zone CD. On doit donc utiliser l'équation de la déformée dans cette zone pour la bloquer à 15 mm en ce point :

$$7200 \frac{1.25^3}{6} - 5000 \frac{(1.25 - 0.5)^3}{6} - 4300 \cdot 1.25 + 0 = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y_{CD}(x = 1.25) = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot (-15 \cdot 10^{-3})$$

$$E = 210000 \text{ MPa} = 21 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 21 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$I_{\alpha\beta} = 107.4 \text{ cm}^4 = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4 \cdot h^3}{12} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{107.4 \cdot 12}{4}} \geq 6.85 \text{ cm}$$

# Principe de superposition

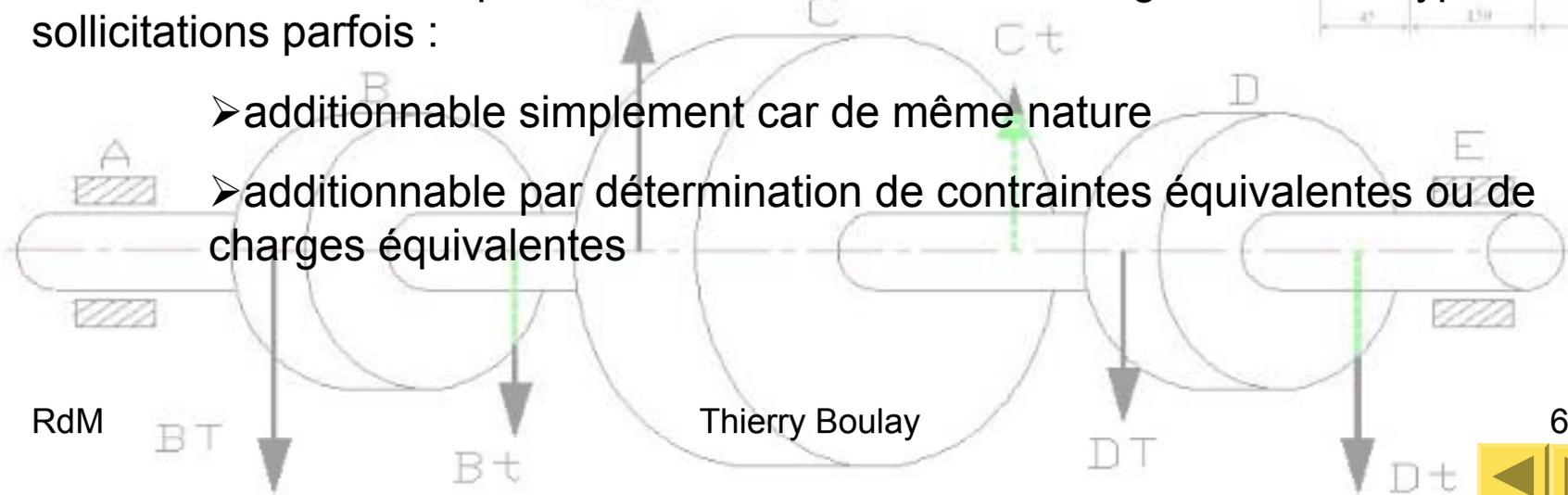
- 5A Principe

Dans la limite des déformations élastiques, une poutre sollicitée par  $n$  actions extérieures indépendantes est équivalente, aux sens des sollicitations, à la somme de  $n$  poutres indépendantes sollicitées par chacune une action des  $n$  actions extérieures prises séparément.

On utilise ce principe dans deux cas bien distincts :

- La superposition simple d'actions extérieures générant la même sollicitation
- Les sollicitations composées où les différentes actions génèrent des types de sollicitations parfois :

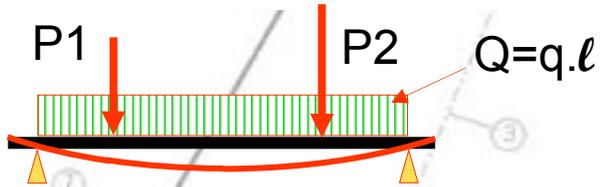
- additionnable simplement car de même nature
- additionnable par détermination de contraintes équivalentes ou de charges équivalentes



# Principe de superposition

- 5B Exemple

## Superposition simple



q est la charge linéique en N/m

$$f_{totale}(x = l/2) = \sum f_i(x = l/2)$$

$$f_1(x = l/2) = P_1 \cdot b \cdot (3l^2 - 4b^2) / (48E \cdot I_{\alpha\beta})$$

$$f_2(x = l/2) = P_2 \cdot b \cdot (3l^2 - 4b^2) / (48E \cdot I_{\alpha\beta})$$

$$f_3(x = l/2) = 5 \cdot q \cdot l^4 / (384E \cdot I_{\alpha\beta})$$

RdM

BT

Bt

Thierry Boulay

DT

Dt



# Sollicitations composées

- 6A Flexion + Torsion

Cas très fréquent d'un arbre qui doit transmettre un couple par l'intermédiaire de plusieurs pignons.

Les contraintes **ne sont pas** de même nature puisque la **torsion** fait naître des **contraintes tangentielles** tandis que la **flexion** fait naître des **contraintes normales**. Elles agissent simultanément sur une même fibre. On exprime donc un **moment de flexion idéal**.

$$Mf_{idéal} = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)Mfz + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{Mfz^2 + Mt^2}$$

Formule de Mohr-Cauchy

$$\lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}}$$

- Pour les matériaux fragiles  $\lambda=1$  théorie de **Rankine**
- Pour les matériaux durs et fragiles  $\lambda=4/5$  théorie de **St Venant**
- Pour les matériaux ductiles  $\lambda=0,5$  théorie de **Coulomb** ou **Tresca**

# Sollicitations composées

- 6B Traction + Torsion

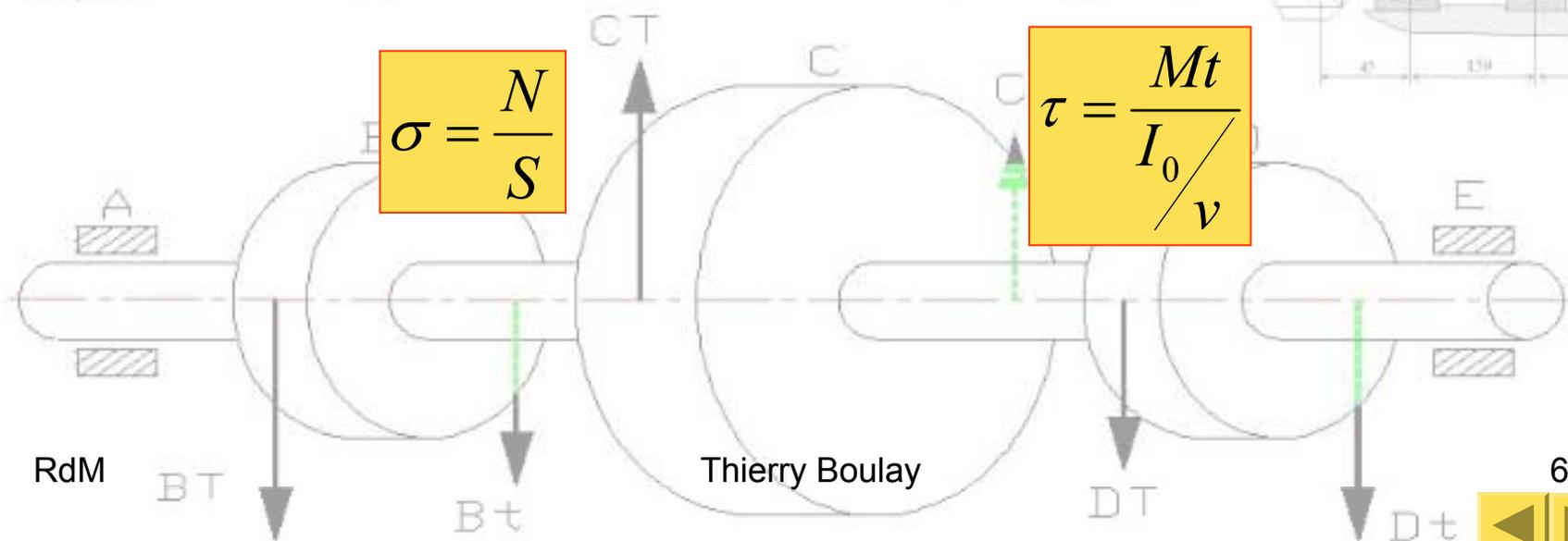
Les contraintes **ne sont pas** de même nature puisque la **torsion** fait naître des **contraintes tangentielles** tandis que la **traction** fait naître des **contraintes normales**. Elles agissent simultanément sur une même fibre.

On exprime donc une **contrainte normale idéale** :

$$\sigma_{\text{idéel}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

$$\tau = \frac{Mt}{I_0 / v}$$



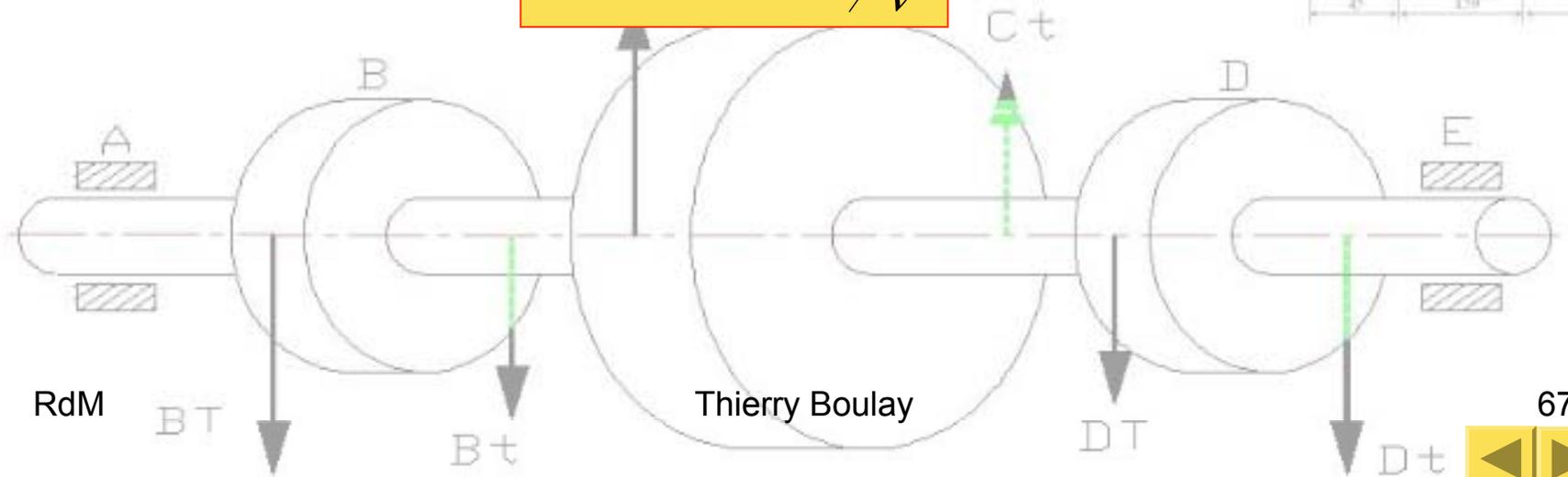
# Sollicitations composées

- 6C Torsion + Cisaillement

Les contraintes **sont** de même nature puisque la **torsion** fait naître des **contraintes tangentielles** ainsi que le **cisaillement**. Elles agissent simultanément sur une même fibre.

On exprime donc une **contrainte tangentielle totale** :

$$\tau_{\text{totale}} = \frac{|T|}{S} + \frac{Mt}{I_0 / \nu}$$



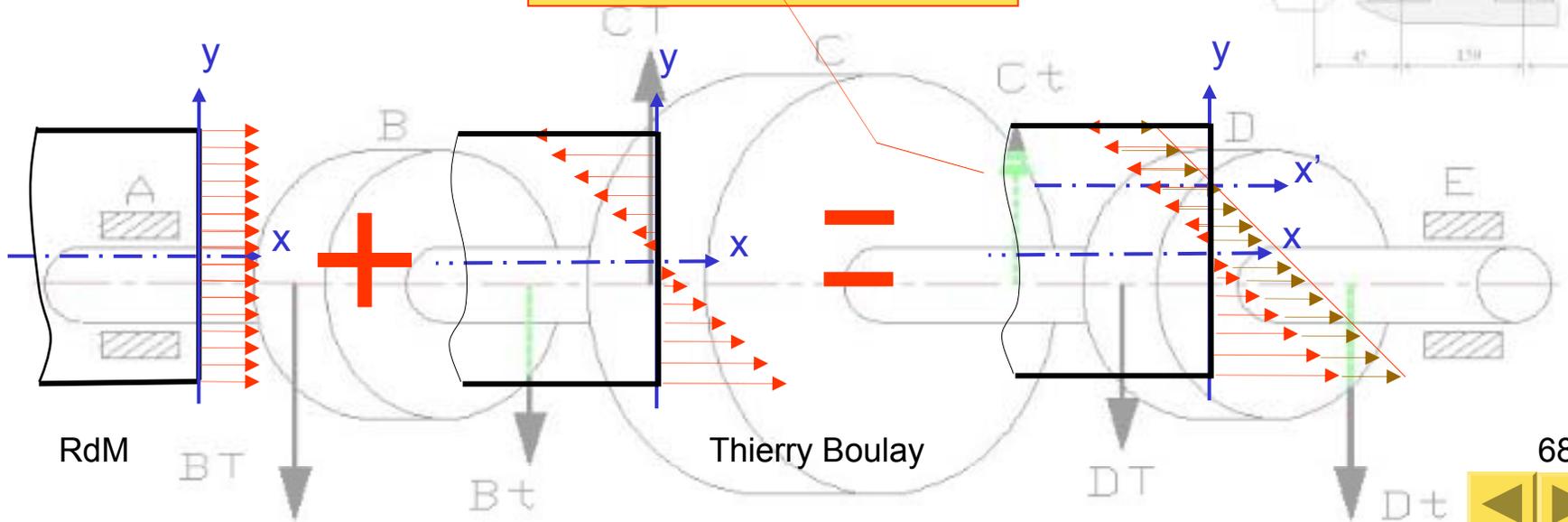
# Sollicitations composées

- 6D Flexion + Traction

Les contraintes **sont** de même nature puisque la **flexion** fait naître des **contraintes normales** ainsi que la **traction**. Elles agissent simultanément sur une même fibre.

On exprime donc une **contrainte normale totale** :

$$\sigma_{\text{totale}} = \pm \frac{N}{S} + \frac{Mf}{I_{Gz} / v}$$



# Notions de flambage

- 7A Théorie d'Euler

## Préliminaire

### Expérience

Si  $F > F_{\text{critique}} \rightarrow$  Instabilité

La déformation ressemble à de la flexion alors que la sollicitation est de la traction.

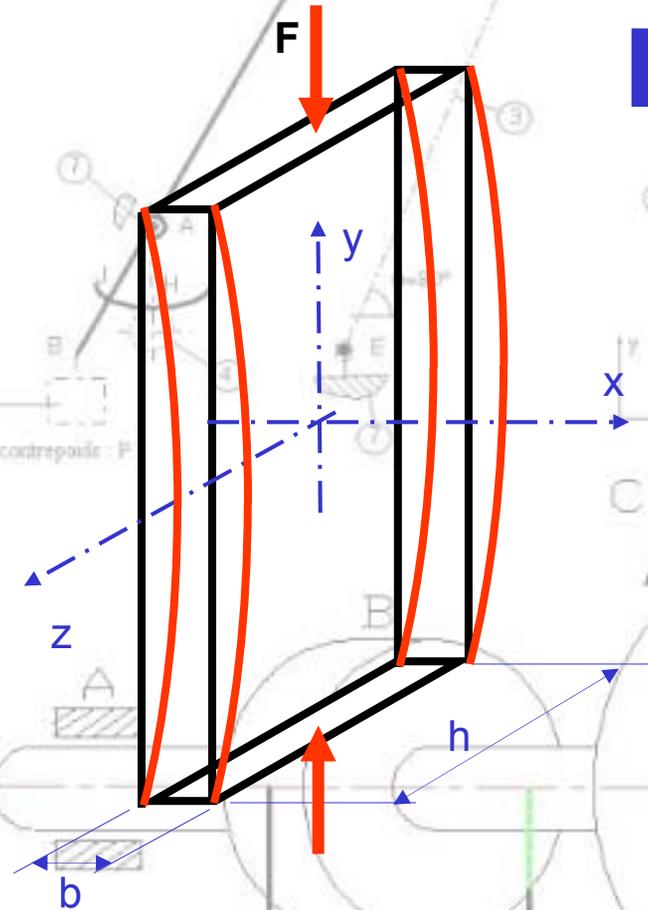
La déformation se produit selon l'axe portant la plus **grande** inertie.

$$I_{Gx} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

?

$$I_{Gz} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

La déformation se produit selon l'axe **x**.



# Notions de flambage

- 7B Détermination de  $F_c$

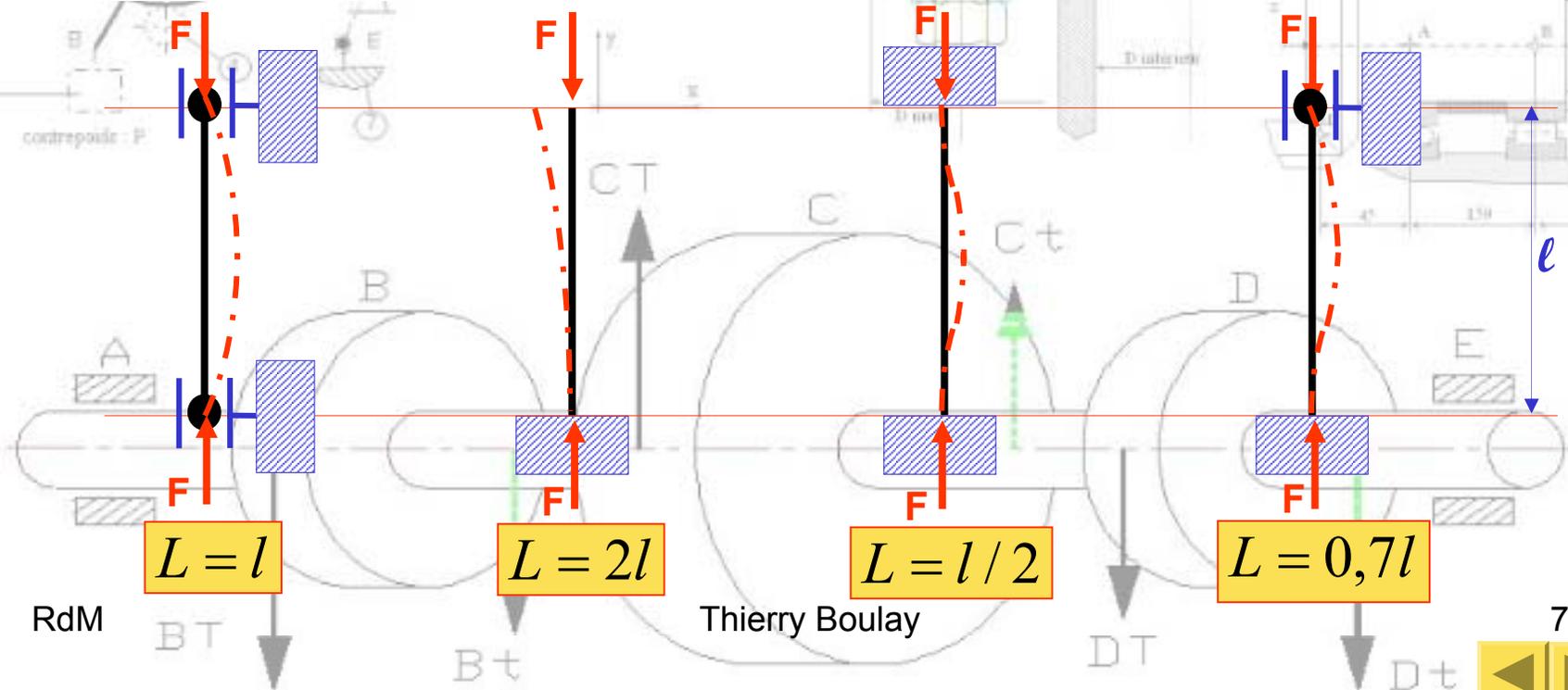
Elle est donnée par la relation suivante :

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{Gz}}{L^2}$$

Moment quadratique mini

Longueur libre de flambage

## Détermination de L



# Notions de flambage

- 7C Détermination de l'élançement

## Définition

L'élançement est une caractéristique d'une poutre, elle est nommée  $\lambda$  et vaut :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

(mm)

(mm) : rayon de giration de la section

Le moment quadratique utilisé est le plus petit des deux moments pour une section considérée

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}}$$

Il existe une valeur critique de l'élançement uniquement due au matériau  $\lambda_c$  :

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi \cdot E}{R_e}}$$

# Notions de flambage

- 7D Condition de résistance au flambage

Il y aura **peut être** flambage si :

$$\lambda \geq \lambda_c$$

Sous cette hypothèse, la **condition de résistance au flambage** impose que la **force admissible** (inférieure à  $F_c$ ) réponde à :

$$2 \cdot \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \cdot \frac{F_{admissible}}{S} \leq R_{pratique \text{ à la compression}}$$

## Application

$b=3\text{mm}$  ;  $h=50\text{mm}$  ;  $l=500\text{mm}$  ;  $E=210000\text{MPa}$  ;  $Re=240\text{N/mm}^2$  ;  $R_{pc}=0,5Re$

La poutre est encastree à une extrémité et à l'autre libre.

Déterminer la force admissible pour ne pas avoir flambage.

- RdM – I Sollicitations simples : par JP. Larralde chez MASSON
- RdM – II Sollicitations composées et systèmes hyperstatiques : par JP. Larralde chez MASSON
- Mécanique des structures – T2 poutres : par S. Laroze chez EYROLLES
- RdM I et II : par W. A. Nash SERIE SCHAUM
- Guide de Mécanique : par JL. Fanchon chez NATHAN
- La Mécanique par les Problèmes – RdM : par A. Campa, R. Chappert, R. Picand chez FOUCHER
- RdM par la pratique T1 et 2 : par J. Roux chez EYROLLES
- Formulaire de RdM : par Y. Xiong chez EYROLLES
- RdM : par P. Agati, F. Lerouge, M. Rossetto chez DUNOD
- RdM T1 et T2 : par A. Giet, L. Géminard chez DUNOD
- .....

Merci à eux...

A partir des études de statique il devient indispensable de réaliser une étude de résistance des matériaux, sa fonction est majeure car elle va permettre de connaître les déformations engendrées sous les différentes sollicitations et donc permettent de prévoir.

Les grandeurs peuvent être dérisoires et il convient à votre niveau non pas de les ignorer mais de s'assurer quelles ne sont pas fausses car elles peuvent engendrer le rupture du système.

Alors à vos crayons et travailler non pas pour subir le système mais pour l'observer, le comprendre, l'analyser et agir.

Vous pouvez retrouver l'intégralité de ce cours et d'autres ainsi que des TD, DS et TP sur le site :

<http://thierryboulay.free.fr>